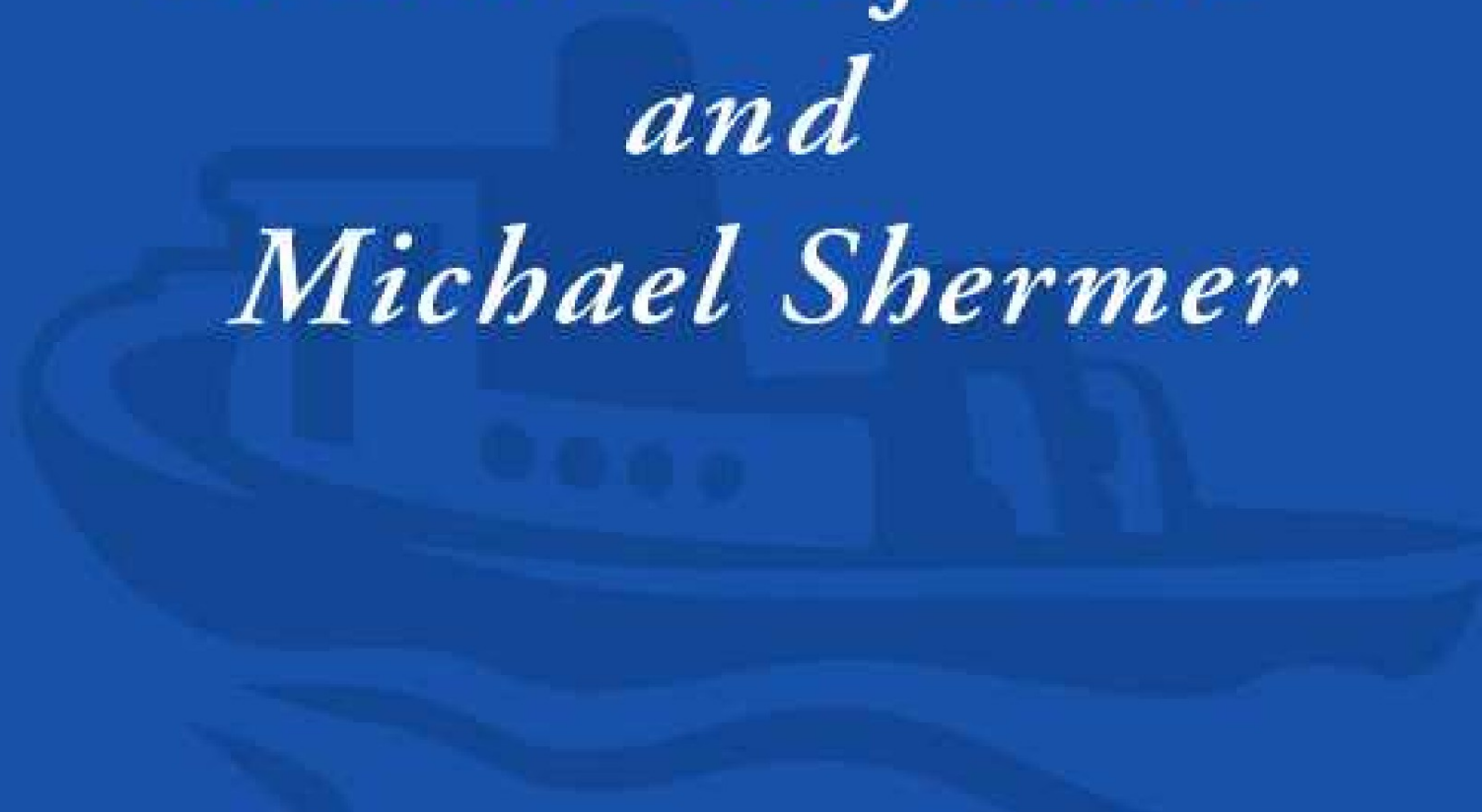


SECRETS OF MENTAL MATH

The Mathemagician's Guide to
Lightning Calculation
and Amazing Math Tricks

Arthur Benjamin
and
Michael Shermer



SECRE+S OF MEN+AL MA+H

The Mathemagician's Guide to Lightning Calculation
and Amazing Math Tricks

Arthur Benjamin
and Michael Shermer



THREE RIVERS PRESS • NEW YORK

Copyright © 2006 por Arthur Benjamin y Michael Shermer

Reservados todos los derechos.

Publicado en los Estados Unidos por Three Rivers Press, una editorial de Crown Publishing Group, una división de Random House, Inc., Nueva York.

www.crownpublishing.com

Publicado originalmente en forma diferente como Mathemagics por Lowell House, Los Ángeles, en 1993.

Three Rivers Press y el diseño de Tugboat son marcas comerciales registradas de Random House, C^a

Datos de catalogación en publicación de la Biblioteca del Congreso

Benjamín, Arturo.

Secretos del cálculo mental: la guía del matemático para el cálculo relámpago y sorprendentes trucos matemáticos / Arthur Benjamin y Michael Shermer.— 1^a ed.

pag. cm.

Incluye referencias bibliográficas.

1. Aritmética mental: estudio y enseñanza. 2. Trucos de magia en educación matemática.

3. Calculadoras mentales. I. Shermer, Michael. II. Título.

QA111.B44 2006 510—

dc22

2005037289

ISBN electrónico: 978-0-307-34746-6

v3.1_r1

Dedico este libro a mi esposa, Deena, y a mis hijas, Laurel y Ariel.

—Arturo Benjamín

Mi dedicación es para mi esposa, Kim, por ser mi confidente y
consejera personal de mayor confianza.

—Michael Shermer

Expresiones de gratitud

Los autores desean agradecer a Steve Ross y Katie McHugh de Random House por su apoyo a este libro. Un agradecimiento especial a Natalya St. Clair por componer el borrador inicial, que fue financiado en parte por una subvención de la Fundación Mellon.

Arthur Benjamin quiere reconocer especialmente a quienes lo inspiraron a convertirse en matemático y mago: el psicólogo cognitivo William G. Chase, los magos Paul Gertner y James Randi, y los matemáticos Alan J. Goldman y Edward R. Scheinerman. Finalmente, gracias a todos mis colegas y estudiantes de Harvey Mudd College, y a mi esposa, Deena, y a mis hijas, Laurel y Ariel, por su constante inspiración.

Contenido

Cubrir

Página del título

Derechos de autor

Dedicación

Expresiones de gratitud

Prólogo de Bill Nye (The Science Guy®)

Prólogo de James Randi

Prólogo de Michael Shermer

Introducción de Arthur Benjamín

Capítulo 0 Trucos rápidos: Cálculos fáciles (e impresionantes)

Capítulo 1 Un poco de toma y daca: Suma y resta mentales

Capítulo 2 Productos de una juventud desperdiciada: Multiplicación básica

Capítulo 3 Productos nuevos y mejorados: Multiplicación Intermedia

Capítulo 4 Divide y vencerás: División mental

Capítulo 5 Suficientemente bueno: El arte de la “estimación”

Capítulo 6 Matemáticas para la pizarra: Matemáticas con lápiz y papel

Capítulo 7 Un capítulo memorable:
Memorizar números

Capítulo 8 El Stu duro simplificado:
Multiplicación avanzada

Capítulo 9 Presto-digitalización:
El arte de la magia matemática

Capítulo ∞ Epílogo de Michael Shermer:
Cómo las matemáticas nos ayudan a pensar
Cosas raras

Respuestas

Bibliografía

Sobre el Autor

Prólogo de Bill Nye (The Science Guy®)

Me gusta pensar en los primeros humanos, las personas a las que se les ocurrió la idea de contar cosas. Deben haber notado de inmediato que escribir con la punta de los dedos funciona muy bien. Quizás Og (un típico hombre de las antiguas cavernas) o uno de sus amigos o asociados dijo: "Aquí estamos uno, dos, tres, cuatro, cinco, así que necesitamos cinco piezas de fruta". Luego, "Oye, mira", alguien debió decir (o gruñir), "puedes contar el número de personas en el campamento, el número de pájaros en un árbol, las piedras en hilera, los troncos para un fuego o las uvas en un montón, sólo con tus dedos". Fue un gran comienzo. Probablemente también fue así como conociste los números por primera vez.

Probablemente hayas oído que las matemáticas son el lenguaje de la ciencia o que el lenguaje de la naturaleza son las matemáticas. Bueno, es verdad. Cuanto más entendemos el universo, más descubrimos sus conexiones matemáticas. Las flores tienen espirales que se alinean con una secuencia especial de números (llamados números de Fibonacci) que puedes entender y generar tú mismo. Las conchas marinas se forman en curvas matemáticas perfectas (espirales logarítmicas) que provienen de un equilibrio químico. Los cúmulos de estrellas se tiran unos de otros en una danza matemática que podemos observar y comprender desde millones e incluso miles de millones de kilómetros de distancia.

Llevamos siglos descubriendo la naturaleza matemática de la Naturaleza. Con cada descubrimiento, alguien tenía que hacer cálculos y asegurarse de que los números fueran correctos. Bueno, *Secrets of Mental Math* puede ayudarte a manejar todo tipo de números. Te sentirás cómodo con los cálculos de una manera que te permitirá conocer algunos de los secretos numéricos de la naturaleza, y ¿quién sabe adónde te llevará eso?

A medida que conozca los números, la respuesta estará realmente a su alcance. Eso no es una broma, porque ahí es donde comienza todo. Casi todo el mundo tiene diez dedos, por eso nuestro sistema matemático

Comenzamos con 1 y llegamos al 10. De hecho, llamamos "dígitos" tanto a nuestros números como a nuestros dedos. ¿Coincidencia? Difícilmente. Sin embargo, muy pronto a nuestros antepasados se les acabaron los dedos. Probablemente te haya pasado lo mismo. Pero no podemos simplemente ignorar esas grandes cifras y (esto es una broma) darnos por vencidos.

Necesitamos números: son parte de nuestras vidas todos los días y de maneras que normalmente ni siquiera notamos. Piensa en una conversación que tuviste con un amigo. Para llamar, necesitabas un número de teléfono y el tiempo que pasabas hablando por teléfono se medía en horas y minutos. Cada fecha de la historia, incluida una importante como tu cumpleaños, se cuenta con números. Incluso usamos números para representar ideas que no tienen nada que ver con contar. ¿Cuáles son tus 20? (Es decir, ¿dónde estás? De los antiguos códigos "10" de la policía, como 10-4 para "sí"). ¿Cuál es el 411 de esa chica? (Es decir, ¿cuáles son sus antecedentes? ¿Está saliendo con alguien? Del número de información telefónica).

Las personas se describen entre sí mediante números que representan la altura y el peso. Y, por supuesto, a todos nos gusta saber cuánto dinero tenemos o cuánto cuesta algo en números: dólares, pesos, yuanes, rupias, coronas, euros o yenes. Además (otra broma), este libro tiene una sección para ahorrar tiempo sobre cómo recordar números (y una gran cantidad de números).

Si por alguna razón no te apasionan las matemáticas, sigue leyendo un poco más. Por supuesto que yo, como científico, espero que te gusten las matemáticas. Bueno, en realidad espero que te gusten las matemáticas. Pero no importa lo que sientas acerca de las matemáticas, el odio o el amor, apuesto a que a menudo te encontrarás simplemente queriendo saber la respuesta de inmediato, sin tener que escribir todo cuidadosamente y trabajar lenta y diligentemente, o sin siquiera tener que detenerte. y toma una calculadora. Quieres la respuesta, como decimos, "como por arte de magia". Resulta que puedes resolver o resolver muchos, muchos problemas matemáticos casi por arte de magia. Este libro te mostrará cómo.

Lo que hace que cualquier tipo de magia sea tan intrigante y divertida es que el público rara vez sabe cómo se realiza el truco. "Cómo hizo eso ...?" "No lo sé, pero es genial". Si tienes audiencia, los trucos y atajos de *Secrets of Mental Math* se parecen mucho a la magia. El público rara vez sabe cómo se realiza un truco; ellos

solo aprecio. Tenga en cuenta, sin embargo, que en la magia no vale la pena hacerlo si nadie está mirando. Pero con Secrets, saber cómo funciona no resta diversión (o juego de palabras). Cuando la aritmética es fácil, no te quedas atascado en el cálculo; Puedes concentrarte en la maravillosa naturaleza de los números. Después de todo, las matemáticas gobiernan el universo.

El Dr. Benjamin se metió en este negocio de calcular a la velocidad del rayo sólo por diversión. Tenemos que suponer que impresionó a sus profesores y compañeros de clase. Los magos pueden hacer que algunos de su público piensen que tienen poderes sobrenaturales. Los matemáticos, al principio, dan la impresión de que son genios. Hacer que la gente se dé cuenta de lo que estás haciendo es una parte antigua de compartir ideas. Si están impresionados, probablemente escucharán lo que usted tenga que decir. Así que prueba algunas "matemáticas". Puedes impresionar a tus amigos, está bien. Pero también te encontrarás actuando sólo para ti. Descubrirás que eres capaz de resolver problemas que no creías poder hacer. Quedarás impresionado... contigo mismo.

Ahora bien, contar con los dedos es una cosa (un dedo vale). Pero ¿alguna vez te has encontrado contando en voz alta, susurrando o haciendo otros sonidos mientras calculas? Casi siempre facilita las matemáticas. El problema, sin embargo, es que otras personas piensan que eres un poco raro... ni siquiera (más humor matemático). Bueno, en Secretos del cálculo mental, el Dr. Benjamin te ayuda a aprender a utilizar esa característica "en voz alta" de la forma en que funciona tu cerebro para resolver problemas matemáticos con mayor facilidad, rapidez y precisión (lo cual es sorprendente), todo mientras tu El cerebro está pensando, casi como si estuviera pensando en voz alta.

Aprenderá a resolver problemas matemáticos de la misma manera que leemos en inglés, de izquierda a derecha. Aprenderá a manejar grandes problemas rápidamente con buenas conjeturas, en realidad excelentes conjeturas, dentro de un porcentaje aproximadamente. Aprenderás a hacer aritmética rápido; de esa manera podrás dedicar tu tiempo a pensar en lo que significan los números. Og se preguntó: "¿Tenemos suficiente fruta para cada persona sentada alrededor del fuego? Si no, podría haber problemas". Ahora quizás se pregunte: "¿Hay suficiente espacio en esta computadora para realizar un seguimiento de mis archivos de música... o de mi cuenta bancaria?" Si no, podría haber problemas".

Hay más en Secrets que solo adivinar. Puedes aprender a tomar un día, un mes y un año y luego calcular qué día de la semana era o

será. Es fantástico, casi mágico, poder decirle a alguien qué día de la semana nació. Pero es realmente importante poder imaginar que Estados Unidos tuvo su primer gran 4 de julio un jueves de 1776. El 15 de abril de 1912, el día en que se hundió el Titanic, fue lunes. El primer ser humano que pisó la Luna pisó allí el 20 de julio de 1969, un domingo. Probablemente nunca olvidará que Estados Unidos fue atacado por terroristas el 11 de septiembre de 2001.

Con *Secrets of Mental Math*, siempre podrás demostrar que era martes.

Hay relaciones en la Naturaleza que los números describen mejor que cualquier otra forma que conozcamos. Hay números simples que puedes contar con tus manos: uno, dos, tres y más. Pero también hay un número infinito de números intermedios. Hay fracciones.

Hay números que nunca terminan. Se vuelven tan grandes como quieras y tan pequeños que son difíciles de imaginar. Puedes conocerlos. Con *Secrets of Mental Math*, puedes hacer que incluso estos números intermedios te vengan a la mente tan rápidamente que tendrás un poco más de espacio en tu cerebro para pensar por qué nuestro mundo funciona de esta manera. De una forma u otra, este libro le ayudará a ver que en la naturaleza todo suma.

Prólogo de James Randi

Las matemáticas son un lenguaje maravilloso, elegante y sumamente útil. Tiene su propio vocabulario y sintaxis, sus propios verbos, sustantivos y modiers, y sus propios dialectos y patois. Algunos lo utilizan brillantemente y otros mal. Algunos de nosotros tememos perseguir sus usos más esotéricos, mientras que unos pocos lo empuñamos como una espada para atacar y conquistar formularios de impuestos sobre la renta o masas de datos que resisten a los menos valientes. Este libro no garantiza convertirlo en un Leibniz, ni colocarlo en el escenario como un profesor de álgebra, pero espero que le brinde una visión nueva, emocionante e incluso entretenida de lo que se puede hacer con ese maravilloso invento. números.

Todos pensamos que sabemos lo suficiente sobre aritmética para salir adelante, y ciertamente no nos sentimos culpables por recurrir a la práctica calculadora de bolsillo que se ha convertido en una parte tan importante de nuestras vidas. Pero, así como la fotografía puede cegarnos ante la belleza de una pintura de Vermeer, o un teclado electrónico puede hacernos olvidar la magnificencia de una sonata de Horowitz, confiar demasiado en la tecnología puede negarnos los placeres que encontrará en estas páginas.

Recuerdo el placer que experimenté cuando era niño cuando me mostraron que podía multiplicar por 25 simplemente sumando dos ceros a mi número y dividiéndolo por 4. Lo siguiente fue descartar nueves para comprobar la multiplicación, y cuando descubrí la multiplicación cruzada Me enganché y me convertí, por un corto tiempo, en un loco de las matemáticas generalmente insoportable. No se dispone de vacunas contra tales dolencias. Tienes que recuperarte tú solo. ¡Tener cuidado!

Este es un libro divertido. No lo tendrías ahora mismo en tus manos si no tuvieras cierto interés ya sea en mejorar tus habilidades matemáticas o en satisfacer una curiosidad sobre este fascinante tema. Como ocurre con todos estos libros de instrucciones, usted puede conservar y utilizar sólo una determinada

porcentaje de los variados trucos y métodos descritos aquí, pero solo eso hará que valga la pena la inversión de su tiempo.

Conozco bastante bien a ambos autores. Art Benjamin no es sólo uno de esos niños genios de los que solíamos quejarnos en la escuela, sino que también es conocido por pisar las tablas del Castillo Mágico de Hollywood, realizando demostraciones de su habilidad, y en una ocasión viajó a Tokio, Japón, para enfrentar sus habilidades matemáticas contra una dama sabia en la televisión en vivo. Michael Shermer, con su conocimiento especializado de la ciencia, tiene una excelente visión general de las aplicaciones prácticas de las matemáticas tal como se utilizan en el mundo real.

Si ésta es tu primera exposición a este tipo de buenas cosas matemáticas, te envidio. Descubrirás, a medida que encuentres cada nueva y deliciosa forma de atacar los números, que te perdiste algo en la escuela. Las matemáticas, particularmente la aritmética, son una herramienta poderosa y confiable para el uso diario que nos permite manejar nuestras complicadas vidas con mayor seguridad y precisión. Deja que Art y Michael te muestren cómo redondear algunas de las esquinas y cortar parte del trazado. Recuerde estas palabras del Dr. Samuel Johnson, un alma eminentemente práctica en todos los aspectos: “Las investigaciones aritméticas brindan entretenimiento en soledad por la práctica y reputación en público por el efecto”.

Sobre todo, disfruta del libro. Deja que te entretenga y diviértete con él. Que, con una buena acción ocasional, un trozo de pizza (¡sin anchoas!) y una selección de buenos amigos es todo lo que le puedes pedir a la vida. Bueno, casi todos. Quizás un Ferrari...

Prólogo

por Michael Shermer

Mi buen amigo, el Dr. Arthur Benjamin, profesor de matemáticas en el Harvey Mudd College de Claremont, California, sube al escenario entre aplausos en el Magic Castle, un célebre club de magia de Hollywood, donde está a punto de realizar "matemagias" o lo que él llama el arte del cálculo mental rápido. El arte no se parece en nada a un profesor de matemáticas de una universidad prestigiosa. Sorprendentemente ingenioso, parece estar en casa con el resto de los jóvenes magos que juegan en el Castillo, y lo es.

Lo que hace que Art sea tan especial es que puede tocar frente a cualquier grupo, incluidos magos y matemáticos profesionales, porque puede hacer algo que casi nadie más puede hacer. Art Benjamin puede sumar, restar, multiplicar y dividir números mentalmente más rápido que la mayoría de las personas con una calculadora. Puede elevar al cuadrado números de dos, tres y cuatro dígitos, así como encontrar raíces cuadradas y cúbicas, sin necesidad de escribir nada en un papel. Y él puede enseñarte cómo realizar tu propia magia matemática.

Tradicionalmente, los magos se niegan a revelar cómo realizan sus trucos. Si lo hicieran, todo el mundo sabría cómo se hacen y se perdería el misterio y la fascinación de la magia. Pero Art quiere que la gente se entusiasme con las matemáticas. Y sabe que una de las mejores maneras de hacerlo es contarle a usted y a otros lectores sus secretos del "genio de las matemáticas". Con estas habilidades, casi cualquiera puede hacer lo que hace Art Benjamin cada vez que sube al escenario para realizar su magia.

Esta noche en particular en el Castillo Mágico, Art comienza preguntando si alguien del público tiene una calculadora. Un grupo de ingenieros levantan la mano y se unen a Art en el escenario. Al ofrecer probar sus calculadoras para asegurarse de que funcionan, Art le pide a un miembro de la audiencia que diga un número de dos dígitos. "Cincuenta y siete", grita uno. Art señala a otro que grita: "Veintitrés".

Dirigiendo su atención a los que están en el escenario, Art les dice: "Multiplica 57 por 23 en la calculadora y asegúrate de obtener 1311 o las calculadoras no funcionarán correctamente". Art espera pacientemente mientras los voluntarios terminan de ingresar los números. Cuando cada participante indica que su calculadora indica 1311, la audiencia deja escapar un grito ahogado colectivo. ¡El asombroso Arte ha vencido a las calculadoras en su propio

A continuación, Art informa a la audiencia que elevará al cuadrado cuatro números de dos dígitos más rápido de lo que sus pulsadores en el escenario pueden cuadrarlos en sus calculadoras. El público le pide que eleve al cuadrado los números 24, 38, 67 y 97. Luego, en letras grandes y en negrita para que todos puedan ver, Art escribe: 576, 1444, 4489, 9409. Art se dirige a sus ingenieros voluntarios, cada uno de los cuales está calculando un cuadrado de dos dígitos y les pide que digan sus respuestas. Su respuesta provoca jadeos y luego aplausos del público: "576, 1444, 4489, 9409". La mujer a mi lado se sienta con la boca abierta por el asombro.

Luego, Art ofrece elevar al cuadrado números de tres dígitos sin siquiera escribir la respuesta. "Quinientos setenta y dos", grita un caballero. La respuesta de Art llega menos de un segundo después: "572 al cuadrado es 327.184". Inmediatamente señala a otro miembro de la audiencia, quien grita "389", seguido de la respuesta de Art sin parpadear: "389 al cuadrado te dará 151,321". Alguien más deja escapar: "262". "Eso te dará 68.644". Sintiendo que se retrasó sólo un instante en el último, promete compensarlo en el siguiente número.

El desafío llega: 991. Sin pausa, Art eleva al cuadrado el número: "982.081". Se dan varios números más de tres dígitos y Art responde perfectamente. Los miembros del público sacuden la cabeza con incredulidad.

Con el público en la palma de su mano, Art ahora declara que intentará cuadrar un número de cuatro dígitos. Una mujer grita "1.036" y Art responde instantáneamente: "Eso es 1.073.296". El público se ríe y Art explica: "No, no, es un número demasiado fácil. Se supone que no debo ganarle a las calculadoras en esto. Probemos con otro". Un hombre ofrece un desafiante 2.843. Haciendo una breve pausa entre los dígitos, Art responde: "Veamos, el cuadrado de eso debería ser 8 millones... 82 mil... 649". Tiene razón, por supuesto, y el

El público ruge en aprobación, tan fuerte como lo hizo con el mago anterior que cortó a una mujer por la mitad e hizo desaparecer a un perro.

Es lo mismo en todos los lugares a los que va Art Benjamin, ya sea el auditorio de una escuela secundaria, un aula universitaria, una conferencia profesional, el Castillo Mágico o un estudio de televisión. El profesor Benjamin ha realizado su tipo especial de magia en vivo en todo el país y en numerosos programas de entrevistas de televisión. Ha sido objeto de investigación por parte de un psicólogo cognitivo de la Universidad Carnegie Mellon y aparece en un libro académico de Steven Smith llamado *The Great Mental Calculators: The Psychology, Methods, and Lives of Calculating Prodigies, Past and Present*. Art nació en Cleveland el 19 de marzo de 1961 (que, según él, fue domingo, habilidad que le enseñará en el [capítulo 9](#)). Art, un niño hiperactivo, enloquecía a sus profesores con sus payasadas en el aula, que incluían corregir los errores matemáticos que cometían ocasionalmente.

A lo largo de este libro, cuando te enseña sus secretos matemáticos, Art recuerda cuándo y dónde aprendió estas habilidades, por lo que guardaré las fascinantes historias para que te las cuente.

Art Benjamin es un individuo extraordinario con un programa extraordinario para enseñarte cálculo mental rápido. Ofrezco estas afirmaciones sin dudarlo, y sólo les pido que recuerden que esto no proviene de un par de tipos que prometen milagros si solo llaman a nuestra línea directa 800. Tanto Art como yo estamos acreditados en la más conservadora de las profesiones académicas (el arte en matemáticas y yo mismo en la historia de la ciencia) y nunca nos arriesgaríamos a sufrir una vergüenza profesional (o algo peor) al hacer afirmaciones tan poderosas si no fueran ciertas. En pocas palabras, esto funciona y prácticamente todo el mundo puede hacerlo porque este arte del "genio de las matemáticas" es una habilidad que se aprende. Así que puedes esperar mejorar tus habilidades matemáticas, impresionar a tus amigos, mejorar tu memoria y, sobre todo, ¡divertirte!

Introducción

Desde que era niño me encantaba jugar con números y en este libro espero compartir mi pasión contigo. Siempre he encontrado que los números tienen un cierto atractivo mágico y pasé innumerables horas entreteniéndome a mí y a los demás con sus hermosas propiedades. Cuando era adolescente, actué como mago y posteriormente combiné mi amor por las matemáticas y la magia en un espectáculo de larga duración, llamado Mathemagics, donde demostraba y explicaba los secretos del cálculo mental rápido a audiencias de todas las edades.

Desde que obtuve mi doctorado, he enseñado matemáticas en Harvey Mudd College y todavía disfruto compartir la alegría de los números con niños y adultos de todo el mundo. En este libro, compartiré todos mis secretos para hacer matemáticas mentalmente, de forma rápida y sencilla. (Me doy cuenta de que se supone que los magos no deben revelar sus secretos, pero los matemáticos tienen un código de ética diferente. Las matemáticas deben ser inspiradoras, no misteriosas).

¿Qué aprenderás de este libro? Aprenderá a hacer matemáticas mentalmente más rápido de lo que jamás creyó posible. Después de un poco de práctica, mejorarás drásticamente tu memoria para los números. Aprenderá proezas mentales que impresionarán a sus amigos, colegas y profesores. Pero también aprenderá a ver las matemáticas como una actividad que en realidad puede ser divertida.

Con demasiada frecuencia, las matemáticas se enseñan como un conjunto de reglas rígidas, lo que deja poco espacio para el pensamiento creativo. Pero, como aprenderá en Secretos, a menudo existen varias formas de resolver el mismo problema. Los grandes problemas se pueden dividir en componentes más pequeños y manejables. Buscamos características especiales para que nuestros problemas sean más fáciles de resolver. Me parecen valiosas lecciones de vida que podemos utilizar para abordar todo tipo de problemas, matemáticos o de otro tipo.

“¿Pero el talento matemático no es algo con lo que se nace?” Me hacen esta pregunta todo el tiempo. Mucha gente está convencida de que las calculadoras de rayos están prodigiosamente dotadas. Quizás nací con cierta curiosidad sobre cómo funcionan las cosas, ya sea un problema de matemáticas o un truco de magia. Pero estoy convencido, basado en muchos años de experiencia docente, de que las matemáticas rápidas son una habilidad que cualquiera puede aprender. Y como cualquier habilidad que valga la pena, se necesita práctica y dedicación si deseas convertirte en un experto. Pero para lograr estos resultados de manera eficiente, es importante practicar de la manera correcta . ¡Déjame mostrarte el camino!

Matemáticamente,

Dr. Arthur Benjamin

Claremont, California

Capítulo 0

Trucos rápidos: Cálculos fáciles (e impresionantes)

En las páginas siguientes, aprenderá a hacer matemáticas mentalmente más rápido de lo que jamás creyó posible. Después de practicar los métodos de este libro durante un rato, su capacidad para trabajar con números aumentará espectacularmente. Con aún más práctica, podrás realizar muchos cálculos más rápido que alguien que use una calculadora. Pero en este capítulo, mi objetivo es enseñarte algunos cálculos sencillos pero impresionantes que puedes aprender a hacer de inmediato. Dejaremos algunas de las cosas más serias para más adelante.

MULTIPLICACIÓN INSTANTÁNEA

Comencemos con una de mis hazañas favoritas de cálculo mental: cómo multiplicar mentalmente cualquier número de dos dígitos por once. Es muy fácil una vez que conoces el secreto. Considere el problema:

$$32 \times 11$$

Para resolver este problema, simplemente suma los dígitos, $3 + 2 = 5$, coloca el 5 entre el 3 y el 2, y ahí está tu respuesta:

$$\begin{array}{r} 352 \\ \hline \end{array}$$

¿Qué podría ser más fácil? Ahora tu intenta:

$$53 \times 11$$

Como $5 + 3 = 8$, tu respuesta es simplemente

583

Uno mas. Sin mirar la respuesta ni escribir nada, ¿qué es?

81×11 ?

¿Recibiste 891? ¡Felicidades!

Ahora, antes de que te emociones demasiado, te he mostrado sólo la mitad de lo que necesitas saber. Supongamos que el problema es

85×11

Aunque $8 + 5 = 13$, ¡la respuesta NO es 8135!

Como antes, el 3 va entre los números, pero el 1 necesita
se suma al 8 para obtener la respuesta correcta:

935

Piense en el problema de esta manera:

I
835
935

Aquí hay otro ejemplo. Pruebe 57×11 .

Como $5 + 7 = 12$, la respuesta es

I
527
627

Bien, ahora es tu turno. Tan rápido como puedas, ¿qué es?

77×11 ?

Si obtuviste la respuesta 847, date una palmadita en la espalda.
Estás en camino de convertirte en matemático.

Ahora, sé por experiencia que si le dices a un amigo o profesor que puedes multiplicar, en tu cabeza, cualquier número de dos cifras por once, no pasará mucho tiempo antes de que te pidan que hagas 99×11 . Hagámoslo. uno ahora, así que estamos listos para ello.

Como $9 + 9 = 18$, la respuesta es:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 989 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Bien, tómate un momento para practicar tu nueva habilidad unas cuantas veces y luego comienza a mostrarla. Te sorprenderá la reacción que obtienes. (¡Decide o no revelar el secreto, depende de ti!)

Bienvenido de nuevo. En este punto, probablemente tengas algunas preguntas, como por ejemplo:

"¿Podemos utilizar este método para multiplicar números de tres dígitos (o más) por once?"

Absolutamente. Por ejemplo, para el problema 314×11 , la respuesta aún comienza con 3 y termina con 4. Como $3 + 1 = 4$ y $1 + 4 = 5$, la respuesta es 3454. Pero guardaremos problemas más grandes como este para más tarde.

De manera más práctica, probablemente te estés diciendo a ti mismo:

"Bueno, esto está bien para multiplicar por once, pero ¿qué pasa con números más grandes? ¿Cómo multiplico números por doce, trece o treinta y seis?"

Mi respuesta es: ¡Paciencia! De eso se trata el resto del libro. En [los capítulos 2, 3, 6 y 8](#), aprenderá métodos para multiplicar casi dos números cualesquiera. Mejor aún, no es necesario memorizar reglas especiales para cada número. Sólo se necesitan un puñado de técnicas para multiplicar números mentalmente, de forma rápida y sencilla.

CUADRADO Y MÁS

Aquí hay otro truco rápido.

Como probablemente sepas, el cuadrado de un número es un número multiplicado por sí mismo. Por ejemplo, el cuadrado de 7 es $7 \times 7 = 49$.

Más adelante te enseñaré un método sencillo que te permitirá calcular fácilmente el cuadrado de cualquier número de dos o tres dígitos (o superior). Ese método es especialmente sencillo cuando el número termina en 5, así que hagamos ese truco ahora.

Para elevar al cuadrado un número de dos dígitos que termina en 5, solo necesitas recordar dos cosas.

1. La respuesta comienza multiplicando el primer dígito por el siguiente dígito superior.
2. La respuesta termina en 25.

Por ejemplo, para elevar al cuadrado el número 35, simplemente multiplicamos el primer dígito (3) por el siguiente dígito superior (4) y luego agregamos 25. Como $3 \times 4 = 12$, la respuesta es 1225. Por lo tanto, $35 \times 35 = 1225$. Nuestros pasos se pueden ilustrar de esta manera:

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 35 \\
 \hline
 3 \times 4 = 12 \\
 5 \times 5 = \underline{25} \\
 \text{Answer: } 1225
 \end{array}$$

¿Qué tal el cuadrado de 85? Como $8 \times 9 = 72$, inmediatamente obtenga $85 \times 85 = 7225$.

$$\begin{array}{r}
 85 \\
 \times 85 \\
 \hline
 8 \times 9 = 72 \\
 5 \times 5 = \underline{25} \\
 \text{Answer: } 7225
 \end{array}$$

Podemos usar un truco similar al multiplicar números de dos dígitos con el mismo primer dígito y segundos dígitos que suman 10. La respuesta comienza de la misma manera que antes (el primer dígito multiplicado por el siguiente dígito superior), seguido de el producto de los segundos dígitos. Por ejemplo, probemos 83×87 . (Ambos números comienzan con 8 y los últimos dígitos suman $3 + 7 = 10$). Dado que $8 \times 9 = 72$ y $3 \times 7 = 21$, la respuesta es 7221.

$$\begin{array}{r}
 83 \\
 \times 87 \\
 \hline
 8 \times 9 = 72 \\
 3 \times 7 = 21 \\
 \hline
 \text{Answer: } 7221
 \end{array}$$

De manera similar, $84 \times 86 = 7224$.

Ahora es tu turno. Intentar

$$26 \times 24$$

¿Cómo comienza la respuesta? Con $2 \times 3 = 6$. ¿Cómo termina? Con $6 \times 4 = 24$. Por tanto, $26 \times 24 = 624$.

Recuerde que para usar este método, los primeros dígitos deben ser iguales y los últimos dígitos deben sumar 10. Por lo tanto, podemos usar este método para determinar instantáneamente que

$$\begin{array}{l}
 31 \times 39 = 1209 \\
 32 \times 38 = 1216 \\
 33 \times 37 = 1221 \\
 34 \times 36 = 1224 \\
 35 \times 35 = 1225
 \end{array}$$

Tu puedes preguntar,

“¿Qué pasa si los últimos dígitos no suman diez? ¿Podemos usar este método para multiplicar veintidós y veintitrés?

Bueno, todavía no. Pero en [el Capítulo 8](#), le mostraré una manera fácil de resolver problemas como éste usando el método de "juntos juntos". (Para 22×23 , harías 20×25 más 2×3 , para obtener $500 + 6 = 506$, ¡pero me estoy adelantando!) No sólo aprenderás a usar estos métodos, sino que también entenderás por qué estos métodos también funcionan.

“¿Existe algún truco para hacer sumas y restas mentales?”

Definitivamente, y de eso se trata el próximo capítulo. Si me viera obligado a resumir mi método en tres palabras, diría: "De izquierda a derecha". Aquí hay un adelanto.

Considere el problema de resta

$$\begin{array}{r} 1241 \\ - 587 \\ \hline \end{array}$$

A la mayoría de la gente no le gustaría resolver este problema mentalmente (¡ni siquiera en papel!), pero simplifiquémoslo. En lugar de restar 587, resta 600. Como $1200 - 600 = 600$, tenemos que

$$\begin{array}{r} 1241 \\ - 600 \\ \hline 641 \end{array}$$

Pero hemos restado 13 de más. (Explicaremos cómo determinar rápidamente el 13 en [el Capítulo 1](#)). Por lo tanto, nuestro problema de resta que parece doloroso se convierte en el problema de suma fácil.

$$\begin{array}{r} 641 \\ + 13 \\ \hline 654 \end{array}$$

lo cual no es demasiado difícil de calcular mentalmente (especialmente de izquierda a derecha). Por tanto, $1241 - 587 = 654$.

Usando un poco de magia matemática, descrita en [el Capítulo 9](#), podrás calcular instantáneamente la suma de los diez números siguientes.

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 5 \\
 14 \\
 19 \\
 33 \\
 52 \\
 85 \\
 137 \\
 222 \\
 + 359 \\
 \hline
 935
 \end{array}$$

Aunque no revelaré el secreto mágico ahora, aquí tienes una pista. La respuesta, 935, ha aparecido en otras partes de este capítulo. En [el Capítulo 6](#) encontrará más trucos para hacer matemáticas en papel .

Además, podrás dar rápidamente el cociente de los dos últimos números:

$$359 \div 222 = 1,61 \text{ (primeros tres dígitos)}$$

Tendremos mucho más que decir sobre la división (incluidos decimales y fracciones) en el [Capítulo 4](#).

MÁS CONSEJOS PRÁCTICOS

A continuación se ofrece un consejo rápido para calcular las propinas.

Supongamos que su factura en un restaurante asciende a \$42 y desea dejar una propina del 15%. Primero calculamos el 10% de \$42, que es \$4,20. Si reducimos esa cifra a la mitad, obtenemos \$2,10, que es el 5% de la factura. Sumar estos números nos da \$6.30, que es exactamente el 15% de la factura. Analizaremos estrategias para calcular el impuesto sobre las ventas, descuentos, interés compuesto y otros elementos prácticos en el [Capítulo 5](#), junto con estrategias que puede utilizar para una estimación mental rápida cuando no se requiere una respuesta exacta.

MEJORA TU MEMORIA

En [el Capítulo 7](#), aprenderá una técnica útil para memorizar números. Esto será útil dentro y fuera del aula. Utilizando un sistema fácil de aprender para convertir números en palabras, podrá memorizar rápida y fácilmente cualquier número: fechas, números de teléfono, lo que quiera.

Hablando de fechas, ¿te gustaría poder saber el día de la semana de cualquier fecha? Puede utilizarlo para calcular fechas de nacimiento, fechas históricas, citas futuras, etc. Te mostraré esto con más detalle más adelante, pero he aquí una forma sencilla de calcular el día 1 de enero de cualquier año del siglo XXI. Primero familiarícese con la siguiente tabla.

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
1	2	3	4	5	6	7 or 0

Por ejemplo, determinemos el día de la semana del 1 de enero de 2030. Tome los dos últimos dígitos del año y considérelolo como su factura en un restaurante. (En este caso, su factura sería de \$30). Ahora agregue una propina del 25%, pero conserve el cambio. (Puede calcular esto cortando el billete a la mitad dos veces e ignorando cualquier cambio. La mitad de \$30 son \$15. Entonces la mitad de \$15 son \$7,50. Mantener el cambio da como resultado una propina de \$7). Por lo tanto, su factura más la propina asciende a \$37. Para calcular el día de la semana, resta el múltiplo más grande de 7 (0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49,...) de tu total, y eso te dirá el día de la semana. En este caso, $37 - 35 = 2$, por lo que el 1 de enero de 2030 ocurrirá el día 2, es decir, el martes:

$$\begin{array}{r}
 \text{Bill:} \quad 30 \\
 \text{Tip:} \quad + 7 \\
 \hline
 37 \\
 \text{subtract 7s: } - 35 \\
 \hline
 2 = \text{Tuesday}
 \end{array}$$

¿Qué tal el 1 de enero de 2043?

$$\begin{array}{r}
 \text{Bill:} \quad 43 \\
 \text{Tip:} \quad + 10 \\
 \hline
 53 \\
 \text{subtract 7s:} \quad - 49 \\
 \hline
 4 = \text{Thursday}
 \end{array}$$

Excepción: si el año es bisiesto, elimine \$1 de su propina y luego proceda como antes. Por ejemplo, para el 1 de enero de 2032, una propina del 25% de \$32 sería \$8. Quitar un dólar da un total de $32 + 7 = 39$. Restar el múltiplo más grande de 7 nos da $39 - 35 = 4$. Entonces, el 1 de enero de 2032 será el día 4, es decir, el jueves. Para obtener más detalles que le permitirán calcular el día de la semana de cualquier fecha de la historia, consulte [el Capítulo 9](#). (De hecho, ¡está perfectamente bien leer ese capítulo primero!)

Sé lo que te estás preguntando ahora:

“¿Por qué no nos enseñaron esto en la escuela?”

Me temo que hay algunas preguntas que ni siquiera yo puedo responder.

¿Estás listo para aprender más matemáticas mágicas? Bueno, ¿a qué estamos esperando? ¡Vamos!

Capítulo 1

Un poco de toma y daca:

Suma y resta mentales

Desde que tengo uso de razón, siempre me ha resultado más fácil sumar y restar números de izquierda a derecha en lugar de de derecha a izquierda. Al sumar y restar números de esta manera, descubrí que podía decir las respuestas a los problemas de matemáticas en clase mucho antes de que mis compañeros dejaran los lápices. ¡Y ni siquiera necesitaba un lápiz!

En este capítulo aprenderá el método de izquierda a derecha para realizar sumas y restas mentales para la mayoría de los números que encuentra a diario. Estas habilidades mentales no sólo son importantes para hacer los trucos de este libro, sino que también son indispensables en la escuela, el trabajo o siempre que uses números. Pronto podrás retirar tu calculadora y utilizar toda la capacidad de tu mente mientras sumas y restas números de dos, tres e incluso cuatro dígitos a la velocidad del rayo.

ADICIÓN DE IZQUIERDA A DERECHA

A la mayoría de nosotros se nos enseña a hacer matemáticas en papel de derecha a izquierda. Y eso está bien para hacer matemáticas en papel. Pero si quieres hacer matemáticas mentalmente (incluso más rápido que en papel), hay muchas buenas razones por las que es mejor trabajar de izquierda a derecha. Después de todo, los números se leen de izquierda a derecha, se pronuncian de izquierda a derecha, por lo que es más natural pensar (y calcular) los números de izquierda a derecha. Cuando calcula la respuesta de derecha a izquierda (como probablemente lo haga en papel), genera la respuesta al revés. Eso es lo que hace que sea tan difícil hacer matemáticas mentalmente.

Además, si desea estimar su respuesta, es más importante saber que su respuesta es "un poco más de 1200" que saber que su respuesta "termina en 8". Por lo tanto, al trabajar de izquierda a derecha, comienza con los dígitos más significativos de su problema. Si está acostumbrado a trabajar de derecha a izquierda en el papel, puede parecer antinatural trabajar con números de izquierda a derecha. Pero con la práctica descubrirás que es la forma más natural y eficaz de hacer ejercicios mentales. cálculos.

Con el primer conjunto de problemas (suma de dos dígitos), el método de izquierda a derecha puede no parecer tan ventajoso. Pero tenga paciencia. Si sigues conmigo, verás que la única manera fácil de resolver problemas de suma de tres dígitos y más, todos los problemas de resta y, definitivamente, todos los problemas de multiplicación y división es de izquierda a derecha. Cuanto antes te acostumbres a la informática de esta forma, mejor.

Suma de dos dígitos

Nuestra suposición en este capítulo es que sabes cómo sumar y restar números de un dígito. Comenzaremos con la suma de dos dígitos, algo que sospecho que ya puedes hacer bastante bien mentalmente. Sin embargo, los siguientes ejercicios son una buena práctica porque las habilidades de suma de dos dígitos que adquiera aquí serán necesarias para problemas de suma más grandes, así como para prácticamente todos los problemas de multiplicación de capítulos posteriores. También ilustra un principio fundamental de la aritmética mental: simplificar el problema dividiéndolo en partes más pequeñas y manejables. Ésta es la clave de prácticamente todos los métodos que aprenderá en este libro. Parafraseando un viejo dicho, el éxito tiene tres componentes: simplificar, simplificar, simplificar.

Los problemas de suma de dos dígitos más fáciles son aquellos que no requieren que lleves ningún número, cuando los primeros dígitos suman 9 o menos y los últimos dígitos suman 9 o menos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 47 \\ + 32 \end{array} \quad (30 + 2)$$

Para resolver $47 + 32$, primero suma 30, luego suma 2. Después de sumar 30, tienes el problema más simple $77 + 2$, que es igual a 79. Ilustramos esto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} 47 + 32 & = & 77 + 2 = 79 \\ & \text{(first add 30)} & \text{(then add 2)} \end{array}$$

El diagrama anterior es simplemente una forma de representar los procesos mentales involucrados en llegar a una respuesta usando nuestro método. Si bien usted necesita poder leer y comprender dichos diagramas a medida que avanza en este libro, nuestro método no requiere que escriba nada usted mismo.

Ahora intentemos un cálculo que requiere que lleves un número:

$$\begin{array}{r} 67 \\ + 28 \text{ (20 + 8)} \end{array}$$

Sumando de izquierda a derecha, puedes simplificar el problema sumando $67 + 20 = 87$; entonces $87 + 8 = 95$.

$$\begin{array}{rcl} 67 + 28 & = & 87 + 8 = 95 \\ & \text{(first add 20)} & \text{(then add 8)} \end{array}$$

Ahora prueba uno por tu cuenta, calculando mentalmente de izquierda a derecha, y luego consulte a continuación para ver cómo lo hicimos:

$$\begin{array}{r} 84 \\ + 57 \text{ (50 + 7)} \end{array}$$

¿Como fue eso? Sumaste $84 + 50 = 134$ y sumaste $134 + 7 = 141$.

$$\begin{array}{rcl} 84 + 57 & = & 134 + 7 = 141 \\ & \text{(first add 50)} & \text{(then add 7)} \end{array}$$

Si llevar números te hace tropezar un poco, no te preocupes. Esta es probablemente la primera vez que has hecho un intento sistemático

al cálculo mental y, si eres como la mayoría de las personas, te llevará tiempo acostumbrarte. Sin embargo, con la práctica, comenzarás a ver y escuchar estos números en tu mente, y los llevarás automáticamente cuando sumes. Pruebe con otro problema para practicar, calculándolo nuevamente en su mente primero y luego verificando cómo lo hicimos:

$$\begin{array}{r} 68 \\ + 45 \text{ (40 + 5)} \\ \hline \end{array}$$

Deberías haber sumado $68 + 40 = 108$, y luego $108 + 5 = 113$, la respuesta final. ¿Fue eso más fácil? Si desea probar más problemas de suma de dos dígitos, consulte el conjunto de ejercicios a continuación. (Las respuestas y los cálculos se encuentran al final del libro).

EXERCISE: TWO-DIGIT ADDITION

1. $\begin{array}{r} 23 \\ + 16 \\ \hline \end{array}$	2. $\begin{array}{r} 64 \\ + 43 \\ \hline \end{array}$	3. $\begin{array}{r} 95 \\ + 32 \\ \hline \end{array}$	4. $\begin{array}{r} 34 \\ + 26 \\ \hline \end{array}$	5. $\begin{array}{r} 89 \\ + 78 \\ \hline \end{array}$
6. $\begin{array}{r} 73 \\ + 58 \\ \hline \end{array}$	7. $\begin{array}{r} 47 \\ + 36 \\ \hline \end{array}$	8. $\begin{array}{r} 19 \\ + 17 \\ \hline \end{array}$	9. $\begin{array}{r} 55 \\ + 49 \\ \hline \end{array}$	10. $\begin{array}{r} 39 \\ + 38 \\ \hline \end{array}$

Suma de tres dígitos

La estrategia para sumar números de tres dígitos es la misma que para sumar números de dos dígitos: se suma de izquierda a derecha. Después de cada paso, llegas a un nuevo (y más simple) problema de suma. Intentemos lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 538 \\ + 327 \text{ (300 + 20 + 7)} \\ \hline \end{array}$$

Comenzando con 538, sumamos 300, luego sumamos 20, luego sumamos 7.
 Después de sumar 300 ($538 + 300 = 838$), el problema se convierte en $838 + 27$.
 Después de sumar 20 ($838 + 20 = 858$), el problema se simplifica a $858 + 7 = 865$.
 Este proceso de pensamiento se puede diagramar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 538 + 327 \\ + 300 \end{array} = \begin{array}{r} 838 + 27 \\ + 20 \end{array} = \begin{array}{r} 858 + 7 \\ + 7 \end{array} = 865$$

Todos los problemas de suma mental se pueden resolver con este método. El objetivo es seguir simplificando el problema hasta que solo sumes un número de un dígito. Observa que $538 + 327$ requiere que retengas seis dígitos en tu cabeza, mientras que $838 + 27$ y $858 + 7$ requieren solo cinco y cuatro dígitos, respectivamente.
 ¡A medida que simplificas el problema, el problema se vuelve más fácil!

Pruebe mentalmente el siguiente problema de suma antes de mirar para ver cómo lo hicimos:

$$\begin{array}{r} 623 \\ + 159 \end{array} (100 + 50 + 9)$$

¿Redujiste y simplificaste el problema sumando de izquierda a derecha?
 Después de sumar las centenas ($623 + 100 = 723$), te quedó $723 + 59$. Luego deberías haber sumado las decenas ($723 + 50 = 773$), simplificando el problema a $773 + 9$, que luego sumaste para obtener 782. Diagramado, el problema se ve así:

$$\begin{array}{r} 623 + 159 \\ + 100 \end{array} = \begin{array}{r} 723 + 59 \\ + 50 \end{array} = \begin{array}{r} 773 + 9 \\ + 9 \end{array} = 782$$

Cuando resuelvo estos problemas mentalmente, no trato de ver los números en mi mente: trato de escucharlos. Escucho el problema $623 + 159$ como seiscientos veintitrés más ciento cincuenta y nueve; al enfatizar la palabra cien para mí mismo, sé por dónde empezar a agregar. Seis más uno es igual a siete, así que mi siguiente problema es setecientos veintitrés más cincuenta y nueve, y así sucesivamente. Cuando resuelva estos problemas por primera vez, practíquelos en voz alta. Reforzarte verbalmente te ayudará a aprender mucho más rápidamente el método mental.

Los problemas de suma de tres dígitos realmente no son mucho más difíciles que los siguientes:

$$\begin{array}{r} 858 \\ + 634 \\ \hline \end{array}$$

Ahora mira para ver cómo lo hicimos:

$$\begin{array}{r} 858 + 634 = 1458 + 34 = 1488 + 4 = 1492 \\ \quad \quad \quad + 600 \quad \quad \quad + 30 \quad \quad \quad + 4 \end{array}$$

En cada paso escucho (no veo) un problema de adición "nuevo". En mi opinión, el problema suena así:

858 plus 634 is 1458 plus 34 is 1488 plus 4 is 1492.

Es posible que tu conversación mental no suene exactamente igual a la mía (de hecho, es posible que "veas" los números en lugar de "escucharlos"), pero sea lo que sea lo que digas o visualices, el punto es reforzar los números a lo largo del camino para que no olvides dónde estás y tengas que empezar el problema de suma de nuevo.

Probemos con otro para practicar:

$$\begin{array}{r} 759 \\ + 496 \text{ (400 + 90 + 6)} \\ \hline \end{array}$$

Hágalo mentalmente primero y luego verifique nuestro cálculo a continuación:

$$\begin{array}{r} 759 + 496 = 1159 + 96 = 1249 + 6 = 1255 \\ \quad \quad \quad + 400 \quad \quad \quad + 90 \quad \quad \quad + 6 \end{array}$$

Este problema de suma es un poco más difícil que el anterior ya que requiere que lleves números en los tres pasos. Sin embargo, con este problema en particular tienes la opción de utilizar un método alternativo. Estoy seguro de que estarás de acuerdo en que es mucho más fácil sumar 500 a 759 que sumar 496, así que intenta sumar 500 y luego restar la diferencia:

$$\begin{array}{r}
 759 \\
 + 496 \text{ (} 500 - 4 \text{)} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$759 + 496 = 1259 - 4 = 1255$$

(first add 500) (then subtract 4)

Hasta ahora, siempre has dividido el segundo número en cualquier problema para sumarlo al primero. Realmente no importa qué número elijas dividir, pero es bueno ser coherente. De esa manera, tu mente nunca tendrá que perder el tiempo decidiendo qué camino tomar. Si el segundo número resulta ser mucho más simple que el primero, a veces los cambio, como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 207 \\
 + 528 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$207 + 528 = 528 + 207 = 728 + 7 = 735$$

(switch) + 200 + 7

Terminemos sumando números de tres y cuatro dígitos. Dado que la mayor parte de la memoria humana sólo puede contener unos siete u ocho dígitos a la vez, este es un problema tan grande como el que se puede resolver sin recurrir a dispositivos de memoria artificial, como dedos, calculadoras o los mnemotécnicos que se enseñan en el Capítulo 7. [Además](#) , En los problemas que surgen en la práctica, especialmente en los problemas de multiplicación, uno o ambos números terminarán en 0, por lo que haremos hincapié en ese tipo de problemas. Empezamos con uno fácil:

$$\begin{array}{r}
 2700 \\
 + 567 \\
 \hline
 \end{array}$$

Dado que 27 centenas + 5 centenas son 32 centenas, simplemente sumamos el 67 para obtener 32 centenas 67, o 3267. El proceso es el mismo para los siguientes problemas:

$$\begin{array}{r}
 3240 \\
 + 18 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3240 \\
 + 72 \\
 \hline
 \end{array}$$

Como $40 + 18 = 58$, la primera respuesta es 3258. Para el segundo problema, como $40 + 72$ excede 100, sabes que la respuesta será 33 centenas. Como $40 + 72 = 112$, la respuesta es 3312.

Estos problemas son fáciles porque los dígitos (distintos de cero) se superponen en un solo lugar y, por lo tanto, se pueden resolver en un solo paso. Cuando los dígitos se superponen en dos lugares, se necesitan dos pasos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 4560 \\ + 171 \quad (100 + 71) \\ \hline \end{array}$$

Este problema requiere dos pasos, como se diagrama de la siguiente manera:

$$4560 + 171 = \underset{+ 100}{4660} + 71 = \underset{+ 71}{4731}$$

Practique los siguientes ejercicios de suma de tres dígitos y luego agregue algunos (¡juego de palabras!) propios si lo desea hasta que se sienta cómodo haciéndolos mentalmente sin tener que mirar la página. (Las respuestas se pueden encontrar al final del libro).

Carl Friedrich Gauss: el prodigio de las matemáticas

A prodigio es un niño muy talentoso, generalmente llamado precoz o superdotado, y casi siempre por delante de sus compañeros. El matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue uno de esos niños. A menudo se jactaba de que sabía calcular antes de poder hablar.

A la edad de tres años, antes de que le enseñaran aritmética, corrigió la nómina de su padre declarando que "el cálculo está equivocado". Una nueva comprobación de los números demostró que el joven Carl estaba en lo cierto.

Cuando tenía diez años, a Gauss se le presentó el siguiente problema matemático: ¿Cuál es la suma de

¿Números del 1 al 100? Mientras sus compañeros calculaban frenéticamente con papel y lápiz, Gauss inmediatamente imaginó que si extendía los números del 1 al 50 de izquierda a derecha, y los números del 51 al 100 de derecha a izquierda directamente debajo de los números del 1 al 50, cada combinación sumaría 101 ($1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots$). Como había cincuenta sumas, la respuesta sería $101 \times 50 = 5050$.

Para asombro de todos, incluido el profesor, el joven Carl no sólo obtuvo la respuesta antes que los demás, sino que la calculó enteramente en su mente. Escribió la respuesta en su pizarra y la colgó en el escritorio del profesor con un claro "Ahí está". El profesor quedó tan impresionado que invirtió su propio dinero en comprar el mejor libro de texto disponible sobre aritmética y se lo dio a Gauss, diciendo: "Él está más allá de mí, no puedo enseñarle nada más".

De hecho, Gauss se convirtió en el profesor de matemáticas de otros y, finalmente, llegó a convertirse en uno de los más grandes matemáticos de la historia; sus teorías todavía se utilizan hoy en día al servicio de la ciencia. El deseo de Gauss de comprender mejor la naturaleza a través del lenguaje de las matemáticas se resumió en su lema, tomado del Rey Lear de Shakespeare (sustituyendo "leyes" por "ley"): "Tú, naturaleza, eres mi diosa; a tus leyes/Mis servicios están sujetos".

EXERCISE: THREE-DIGIT ADDITION

1.	242	2.	312	3.	635	4.	457	5.	912
	+ 137		+ 256		+ 814		+ 241		+ 475

$$\begin{array}{r}
 6. \quad \mathbf{852} \\
 + \mathbf{378} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7. \quad \mathbf{457} \\
 + \mathbf{269} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8. \quad \mathbf{878} \\
 + \mathbf{797} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 9. \quad \mathbf{276} \\
 + \mathbf{689} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 10. \quad \mathbf{877} \\
 + \mathbf{539} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11. \quad \mathbf{5400} \\
 + \mathbf{252} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12. \quad \mathbf{1800} \\
 + \mathbf{855} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 13. \quad \mathbf{6120} \\
 + \mathbf{136} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 14. \quad \mathbf{7830} \\
 + \mathbf{348} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 15. \quad \mathbf{4240} \\
 + \mathbf{371} \\
 \hline
 \end{array}$$

RESTA DE IZQUIERDA A DERECHA

Para la mayoría de nosotros, es más fácil sumar que restar. Pero si continuas calculando de izquierda a derecha y descomponiendo los problemas en componentes más simples, la resta puede llegar a ser casi tan fácil como la suma.

Resta de dos dígitos

Al restar números de dos dígitos, su objetivo es simplificar el problema de modo que quede reducido a restar (o sumar) un número de un dígito.

Comencemos con un problema de resta muy simple:

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{86} \\
 - \mathbf{25} \quad (\mathbf{20} + \mathbf{5}) \\
 \hline
 \end{array}$$

Después de cada paso, llegas a un problema de resta nuevo y más sencillo. Aquí, primero restamos 20 ($86 - 20 = 66$) luego restamos 5 para llegar al problema de resta más simple $66 - 5$ para obtener la respuesta final de 61. El problema se puede diagramar de esta manera:

$$\mathbf{86 - 25 = 66 - 5 = 61}$$

(first subtract 20) (then subtract 5)

Por supuesto, los problemas de resta son considerablemente más fáciles cuando no hay préstamo (lo que ocurre cuando se resta un dígito más grande de uno más pequeño). Pero la buena noticia es que los problemas de resta “difíciles” generalmente se pueden convertir en problemas de suma “fáciles”. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 86 \\ - 29 \end{array} (20 + 9) \text{ or } (30 - 1)$$

Hay dos formas diferentes de solucionar este problema mentalmente:

1. Primero resta 20, luego resta 9:

$$86 - 29 = 66 - 9 = 57$$

(first subtract 20) (then subtract 9)

Pero para este problema, preferiría la siguiente estrategia: 2.

Primero resta 30, luego suma 1:

$$86 - 29 = 56 + 1 = 57$$

(first subtract 30) (then add 1)

Esta es la regla para decidir qué método usar: si un problema de resta de dos dígitos requiere un préstamo, redondea el segundo número hacia arriba (a un múltiplo de diez). Resta el número redondeado y luego suma la diferencia.

Por ejemplo, el problema $54 - 28$ requeriría un préstamo (ya que 8 es mayor que 4), así que redondea 28 a 30, calcula $54 - 30 = 24$, luego suma 2 para obtener 26 como respuesta final:

$$\begin{array}{r} 54 \\ - 28 \end{array} (30 - 2)$$

$$54 - 28 = 24 + 2 = 26$$

- 30 + 2

Ahora prueba con tu mano (o cabeza) en $81 - 37$. Como 7 es mayor que 1, redondeamos 37 a 40, lo restamos de 81 ($81 - 40 = 41$), luego sumamos nuevamente la diferencia de 3 para llegar a la respuesta final:

$$81 - 37 = 41 + 3 = 44$$

- 40 + 3

Con solo un poco de práctica, se sentirá cómodo resolviendo problemas de resta en ambos sentidos. Simplemente use la regla anterior para

decida qué método funcionará mejor.

EXERCISE: TWO-DIGIT SUBTRACTION

$$\begin{array}{r} 1. \quad 38 \\ - 23 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 84 \\ - 59 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad 92 \\ - 34 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4. \quad 67 \\ - 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5. \quad 79 \\ - 29 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6. \quad 63 \\ - 46 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7. \quad 51 \\ - 27 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8. \quad 89 \\ - 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \quad 125 \\ - 79 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10. \quad 148 \\ - 86 \\ \hline \end{array}$$

Resta de tres dígitos

Ahora intentemos un problema de resta de tres dígitos:

$$\begin{array}{r} 958 \\ - 417 \quad (400 + 10 + 7) \\ \hline \end{array}$$

Este problema en particular no requiere que tomes prestado ningún número (ya que cada dígito del segundo número es menor que el dígito que está encima), por lo que no debería resultarte demasiado difícil. Simplemente resta un dígito a la vez, simplificando a medida que avanzas.

$$\begin{array}{r} 958 - 417 \\ - 400 \end{array} = \begin{array}{r} 558 - 17 \\ - 10 \end{array} = \begin{array}{r} 548 - 7 \\ - 7 \end{array} = 541$$

Ahora veamos un problema de resta de tres dígitos que requiere que tomes prestado un número:

$$\begin{array}{r} 747 \\ - 598 \quad (600 - 2) \\ \hline \end{array}$$

A primera vista, esto probablemente parezca un problema bastante difícil, pero si primero restas $747 - 600 = 147$ y luego sumas 2, llegas a la respuesta final de $147 + 2 = 149$.

$$747 - 598 = 147 + 2 = 149$$

- 600 + 2

Ahora prueba uno tú mismo:

$$\begin{array}{r} 853 \\ - 692 \\ \hline \end{array}$$

¿Primero restaste 700 de 853? Si es así, ¿obtuviste $853 - 700 = 153$? Como restaste demasiado en 8, ¿volviste a sumar 8 para llegar a 161, la respuesta final?

$$853 - 692 = 153 + 8 = 161$$

- 700 + 8

Ahora, admito que le hemos hecho la vida más fácil al restar números cercanos a un múltiplo de 100. (¿Lo notó?) Pero ¿qué pasa con otros problemas, como:

$$\begin{array}{r} 725 \\ - 468 \end{array} \quad (400 + 60 + 8) \text{ or } (500 - ??)$$

Si restas un dígito a la vez, simplificando a medida que avanzas, tu La secuencia se verá así:

$$725 - 468 = 325 - 68 = 265 - 8 = 257$$

(first subtract 400) (then subtract 60) (then subtract 8)

¿Qué pasa si redondeas a 500?

$$725 - 468 = 225 + ?? = ??$$

(first subtract 500) (then add ??)

Restar 500 es fácil: $725 - 500 = 225$. Pero has restado demasiado. El truco consiste en calcular exactamente cuánto es demasiado.

A primera vista, la respuesta dista mucho de ser obvia. Para encontrarlo, necesitas saber qué tan lejos está 468 de 500. La respuesta se puede encontrar usando “complementos”, una técnica ingeniosa que hará que muchos problemas de resta de tres dígitos sean mucho más fáciles de resolver.

Uso de complementos (¡De nada!)

Rápido, ¿a qué distancia de 100 están cada uno de estos números?

57 68 49 21 79

Aquí están las respuestas:

$$\begin{array}{r}
 57 \\
 + 43 \\
 \hline
 100
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 68 \\
 + 32 \\
 \hline
 100
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 49 \\
 + 51 \\
 \hline
 100
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 21 \\
 + 79 \\
 \hline
 100
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 79 \\
 + 21 \\
 \hline
 100
 \end{array}$$

Observe que para cada par de números que suman 100, los primeros dígitos (a la izquierda) suman 9 y los últimos dígitos (a la derecha) suman 10. Decimos que 43 es el complemento de 57, 32 es el complemento de 68, y así sucesivamente.

Ahora encuentras los complementos de estos números de dos dígitos:

37 59 93 44 08

Para encontrar el complemento de 37, primero calcula lo que necesitas sumar a 3 para obtener 9. (La respuesta es 6.) Luego calcula lo que necesitas sumar a 7 para obtener 10. (La respuesta es 3.) Por tanto, 63 es el complemento de 37.

Los otros complementos son 41, 7, 56, 92. Fíjate que, como todo lo que haces como matemático, los complementos se determinan de izquierda a derecha. Como hemos visto, los primeros dígitos suman 9 y los segundos dígitos suman 10. (Se produce una excepción en los números que terminan en 0, por ejemplo, $30 + 70 = 100$, ¡pero esos complementos son simples!)

¿Qué tienen que ver los complementos con la resta mental? Bueno, te permiten convertir problemas de resta difíciles en

problemas de suma sencillos. Consideremos el último problema de resta que nos dio algunos problemas:

$$\begin{array}{r} 725 \\ - 468 \end{array} \quad (500 - 32)$$

Para empezar, restaste 500 en lugar de 468 para llegar a 225 ($725 - 500 = 225$). Pero luego, después de haber restado demasiado, necesitabas calcular cuánto debía volver a sumar. Usar complementos te da la respuesta en forma de ceniza. ¿A qué distancia está 468 de 500? La misma distancia que 68 está a 100. Si encuentras el complemento de 68 de la forma que te hemos mostrado, llegarás a 32. Suma 32 a 225 y llegarás a 257, tu respuesta final.

$$\begin{array}{r} 725 - 468 \\ \text{(first subtract 500)} \end{array} = \begin{array}{r} 225 + 32 \\ \text{(then add 32)} \end{array} = 257$$

Prueba con otro problema de resta de tres dígitos:

$$\begin{array}{r} 821 \\ - 259 \end{array} \quad (300 - 41)$$

Para calcular esto mentalmente, resta 300 de 821 para llegar a 521, luego suma nuevamente el complemento de 59, que es 41, para llegar a 562, nuestra respuesta final. El procedimiento se ve así:

$$\begin{array}{r} 821 - 259 \\ - 300 \end{array} = \begin{array}{r} 521 + 41 \\ + 41 \end{array} = 562$$

Aquí tienes otro problema que puedes probar:

$$\begin{array}{r} 645 \\ - 372 \end{array} \quad (400 - 28)$$

Verifique su respuesta y el procedimiento para resolver el problema a continuación:

$$645 - 372 = 245 + 28 = 265 + 8 = 273$$

$- 400$
 $+ 20$
 $+ 8$

Restar un número de tres dígitos de un número de cuatro dígitos no es mucho más difícil, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} 1246 \\ - 579 \text{ (600 - 21)} \\ \hline \end{array}$$

Al redondear hacia arriba, restas 600 de 1246, quedando 646, luego sumas el complemento de 79, que es 21. Tu respuesta final es $646 + 21 = 667$.

$$1246 - 579 = 646 + 21 = 667$$

$- 600$
 $+ 21$

Pruebe los ejercicios de resta de tres dígitos que aparecen a continuación y luego cree más propios para practicar más (¿o debería ser resta?).

EXERCISE: THREE-DIGIT SUBTRACTION

1. $\begin{array}{r} 583 \\ - 271 \\ \hline \end{array}$	2. $\begin{array}{r} 936 \\ - 725 \\ \hline \end{array}$	3. $\begin{array}{r} 587 \\ - 298 \\ \hline \end{array}$	4. $\begin{array}{r} 763 \\ - 486 \\ \hline \end{array}$	5. $\begin{array}{r} 204 \\ - 185 \\ \hline \end{array}$
--	--	--	--	--

6. $\begin{array}{r} 793 \\ - 402 \\ \hline \end{array}$	7. $\begin{array}{r} 219 \\ - 176 \\ \hline \end{array}$	8. $\begin{array}{r} 978 \\ - 784 \\ \hline \end{array}$	9. $\begin{array}{r} 455 \\ - 319 \\ \hline \end{array}$	10. $\begin{array}{r} 772 \\ - 596 \\ \hline \end{array}$
--	--	--	--	---

11. $\begin{array}{r} 873 \\ - 357 \\ \hline \end{array}$	12. $\begin{array}{r} 564 \\ - 228 \\ \hline \end{array}$	13. $\begin{array}{r} 1428 \\ - 571 \\ \hline \end{array}$	14. $\begin{array}{r} 2345 \\ - 678 \\ \hline \end{array}$	15. $\begin{array}{r} 1776 \\ - 987 \\ \hline \end{array}$
---	---	--	--	--

Capítulo 2

Productos de una juventud desperdiciada:

Multiplicación básica

Probablemente pasé demasiado tiempo de mi infancia pensando en formas cada vez más rápidas de realizar la multiplicación mental; Me diagnosticaron hiperactividad y a mis padres les dijeron que tenía poca capacidad de atención y que probablemente no tendría éxito en la escuela.

(Afortunadamente, mis padres ignoraron ese consejo. También tuve la suerte de contar con profesores increíblemente pacientes en mis primeros años de escuela). Puede que haya sido mi poca capacidad de atención lo que me motivó a desarrollar formas rápidas de hacer aritmética. No creo que tuviera la paciencia para resolver problemas de matemáticas con lápiz y papel. Una vez que haya dominado las técnicas descritas en este capítulo, tampoco querrá volver a depender del lápiz y el papel.

En este capítulo aprenderá cómo multiplicar mentalmente números de un dígito por números de dos dígitos y números de tres dígitos. También aprenderá una manera fenomenalmente rápida de elevar al cuadrado números de dos dígitos. Ni siquiera los amigos que tengan calculadoras podrán seguirte el ritmo. Créame, prácticamente todo el mundo se quedará estupefacto ante el hecho de que tales problemas no sólo puedan resolverse mentalmente, sino que también puedan calcularse con tanta rapidez. A veces me pregunto si no nos engañaron en la escuela; Estos métodos son muy simples una vez que los aprendes.

Hay un pequeño requisito previo para dominar las habilidades de este capítulo: necesitas conocer las tablas de multiplicar hasta el diez. De hecho, para realmente avanzar, necesitas conocer las tablas de multiplicar al derecho y al derecho. Para aquellos de ustedes que necesitan deshacerse de las telarañas, consulten la tabla de multiplicar a continuación. Una vez que haya colocado sus mesas, estará listo para comenzar.

Tabla de multiplicar de números del 1 al 10

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN 2 POR 1

Si avanzaste en [el Capítulo 1](#), adquiriste el hábito de sumar y restar de izquierda a derecha. También realizará prácticamente todos los cálculos de este capítulo de izquierda a derecha. Sin duda, esto es lo contrario de lo que aprendiste en la escuela. Pero pronto verás que es mucho más fácil pensar de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. (Por un lado, puedes empezar a decir tu respuesta en voz alta antes de haber terminado el cálculo. ¡De esa manera parecerá que estás calculando incluso más rápido de lo que eres!)

Abordemos nuestro primer problema:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$$

Primero, multiplica $40 \times 7 = 280$. (Ten en cuenta que 40×7 es como 4×7 , con un cero amigable adjunto). Luego, multiplica $2 \times 7 = 14$. Luego suma 280 más 14 (de izquierda a derecha, por supuesto).) para llegar a 294, la respuesta correcta. Ilustramos este procedimiento a continuación.

$$\begin{array}{r}
 42 \text{ (} 40 + 2 \text{)} \\
 \times 7 \\
 \hline
 40 \times 7 = 280 \\
 2 \times 7 = + 14 \\
 \hline
 294
 \end{array}$$

Hemos omitido diagramar la suma mental de $280 + 14$, ya que aprendiste cómo hacer ese cálculo en el último capítulo. Al principio necesitarás observar el problema mientras haces el cálculo. Con la práctica podrás prescindir de este paso y calcularlo todo en tu mente.

Probemos con otro ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 48 \text{ (} 40 + 8 \text{)} \\
 \times 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

El primer paso es dividir el problema en pequeñas tareas de multiplicación que puedas realizar mentalmente con facilidad. Como $48 = 40 + 8$, multiplica $40 \times 4 = 160$, luego suma $8 \times 4 = 32$. La respuesta es 192. (Nota: si te preguntas por qué funciona este proceso, consulta la sección Por qué funcionan estos trucos al final de el capítulo.)

$$\begin{array}{r}
 48 \text{ (} 40 + 8 \text{)} \\
 \times 4 \\
 \hline
 40 \times 4 = 160 \\
 8 \times 4 = + 32 \\
 \hline
 192
 \end{array}$$

Aquí hay dos problemas mentales más de multiplicación que deberías poder resolver con bastante rapidez. Primero calcula 62×3 . Luego haz 71×9 . Intenta hacerlo mentalmente antes de ver cómo lo hicimos.

$$\begin{array}{r}
 62 \text{ (} 60 + 2 \text{)} \\
 \times 3 \\
 \hline
 60 \times 3 = 180 \\
 2 \times 3 = + 6 \\
 \hline
 186
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 71 \text{ (} 70 + 1 \text{)} \\
 \times 9 \\
 \hline
 70 \times 9 = 630 \\
 1 \times 9 = + 9 \\
 \hline
 639
 \end{array}$$

Estos dos ejemplos son especialmente simples porque los números que se suman esencialmente no se superponen en absoluto. Al hacer $180 + 6$, prácticamente puedes escuchar la respuesta: Ciento ochenta... ¡seis!

Otro tipo de problema de multiplicación mental especialmente sencillo involucra números que comienzan con ve. Cuando el cinco se multiplica por un dígito par, el primer producto será un múltiplo de 100, lo que hace que el problema de suma resultante sea muy sencillo.

$$\begin{array}{r}
 58 \text{ (} 50 + 8 \text{)} \\
 \times 4 \\
 \hline
 50 \times 4 = 200 \\
 8 \times 4 = + 32 \\
 \hline
 232
 \end{array}$$

Pruebe suerte con el siguiente problema:

$$\begin{array}{r}
 87 \text{ (} 80 + 7 \text{)} \\
 \times 5 \\
 \hline
 80 \times 5 = 400 \\
 7 \times 5 = + 35 \\
 \hline
 435
 \end{array}$$

Observe cuánto más fácil es resolver este problema de izquierda a derecha. Se necesita mucho menos tiempo para calcular mentalmente “400 más 35” que para aplicar el método del lápiz y papel de “dejar el 5 y llevar el 3”.

Los dos problemas siguientes son un poco más difíciles.

$$\begin{array}{r}
 38 \text{ (30 + 8)} \\
 \times 9 \\
 \hline
 30 \times 9 = 270 \\
 8 \times 9 = + 72 \\
 \hline
 342
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 67 \text{ (60 + 7)} \\
 \times 8 \\
 \hline
 60 \times 8 = 480 \\
 7 \times 8 = + 56 \\
 \hline
 536
 \end{array}$$

Como de costumbre, dividimos estos problemas en problemas más sencillos. Para el de la izquierda, multiplica 30×9 más 8×9 , lo que da $270 + 72$. El problema de la suma es un poco más difícil porque implica llevar un número. Aquí $270 + 70 + 2 = 340 + 2 = 342$.

Con la práctica, te volverás más hábil para hacer malabarismos con problemas como estos en tu cabeza, y aquellos que requieren que lleves números serán casi tan fáciles como los que no.

Redondeando

Viste en el capítulo anterior lo útil que puede ser el redondeo cuando se trata de restar. Lo mismo ocurre con la multiplicación, especialmente cuando multiplicas números que terminan en ocho o nueve.

Tomemos el problema de 69×6 , que se ilustra a continuación. A la izquierda lo hemos calculado de la forma habitual, sumando $360 + 54$. A la derecha, sin embargo, hemos redondeado 69 a 70 y restado $420 - 6$, lo que quizás te resulte más fácil de hacer.

$$\begin{array}{r}
 69 \text{ (60 + 9)} \\
 \times 6 \\
 \hline
 60 \times 6 = 360 \\
 9 \times 6 = + 54 \\
 \hline
 414
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 69 \text{ (70 - 1)} \\
 \times 6 \\
 \hline
 70 \times 6 = 420 \\
 -1 \times 6 = - 6 \\
 \hline
 414
 \end{array}$$

El siguiente ejemplo también muestra lo fácil que puede ser el redondeo:

$ \begin{array}{r} 78 \text{ (} 70 + 8 \text{)} \\ \times 9 \\ \hline 70 \times 9 = 630 \\ 8 \times 9 = + 72 \\ \hline 702 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 78 \text{ (} 80 - 2 \text{)} \\ \times 9 \\ \hline 80 \times 9 = 720 \\ -2 \times 9 = - 18 \\ \hline 702 \end{array} $
--	---

El método de resta funciona especialmente bien para números que están a sólo uno o dos dígitos de un múltiplo de 10. No funciona tan bien cuando necesitas redondear más de dos dígitos porque la parte del problema de resta se vuelve difícil. Tal como están las cosas, es posible que prefieras seguir con el método de suma. Personalmente, para problemas de este tamaño, uso solo el método de la suma porque en el tiempo dedicado a decidir qué método usar, ¡ya podría haber hecho el cálculo!

Para que puedas perfeccionar tu técnica, te recomiendo encarecidamente practicar más problemas de multiplicación 2 por 1. A continuación se presentan veinte problemas que debe abordar. Le he proporcionado las respuestas al final, incluido un desglose de cada componente de la multiplicación. Si, después de haber resuelto estos problemas, le gustaría practicar más, invente los suyos propios. Calcula mentalmente y luego verifica tu respuesta con una calculadora. Una vez que se sienta seguro de que puede resolver estos problemas rápidamente en su cabeza, estará listo para pasar al siguiente nivel de cálculo mental.

EXERCISE: 2-BY-1 MULTIPLICATION

- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. $\begin{array}{r} 82 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 2. $\begin{array}{r} 43 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ | 3. $\begin{array}{r} 67 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 4. $\begin{array}{r} 71 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$ | 5. $\begin{array}{r} 93 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ |
| 6. $\begin{array}{r} 49 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 7. $\begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ | 8. $\begin{array}{r} 53 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 9. $\begin{array}{r} 84 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 10. $\begin{array}{r} 58 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ |
| 11. $\begin{array}{r} 97 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ | 12. $\begin{array}{r} 78 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$ | 13. $\begin{array}{r} 96 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 14. $\begin{array}{r} 75 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ | 15. $\begin{array}{r} 57 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ |
| 16. $\begin{array}{r} 37 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 17. $\begin{array}{r} 46 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$ | 18. $\begin{array}{r} 76 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ | 19. $\begin{array}{r} 29 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$ | 20. $\begin{array}{r} 64 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ |

PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN 3 POR 1

Ahora que sabes cómo resolver mentalmente problemas de multiplicación de 2 por 1, descubrirás que multiplicar tres dígitos por un solo dígito no es mucho más difícil. Puede comenzar con el siguiente problema de 3 por 1 (que en realidad es solo un problema de 2 por 1 disfrazado):

$$\begin{array}{r}
 320 \text{ (300 + 20)} \\
 \times 7 \\
 \hline
 300 \times 7 = 2100 \\
 20 \times 7 = + 140 \\
 \hline
 2240
 \end{array}$$

¿Fue fácil para ti? (Si este problema le causó problemas, es posible que desee revisar el material de sumas en [el Capítulo 1](#)). Intentemos otro problema de 3 por 1 similar al que acaba de resolver, excepto que reemplazamos el 0 con un 6 para que tenga otro paso a realizar:

$$\begin{array}{r}
 326 \text{ (300 + 20 + 6)} \\
 \times \quad 7 \\
 \hline
 300 \times 7 = 2100 \\
 20 \times 7 = + 140 \\
 \hline
 2240 \\
 6 \times 7 = + 42 \\
 \hline
 2282
 \end{array}$$

En este caso, simplemente sumas el producto de 6×7 , que ya sabes que es 42, a la primera suma de 2240. Como no necesitas llevar ningún número, es fácil sumar 42 a 2240 para llegar a el total de 2282.

Al resolver éste y otros problemas de multiplicación de 3 por 1, la parte difícil puede ser mantener en la memoria la primera suma (en este caso, 2240) mientras se realiza el siguiente problema de multiplicación (en este caso, 6×7). No existe un secreto mágico para recordar ese primer número, pero con la práctica te garantizo que mejorarás tu concentración y será más fácil aferrarte a los números mientras realizas otras funciones.

Probemos con otro problema:

$$\begin{array}{r}
 647 \text{ (600 + 40 + 7)} \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 600 \times 4 = 2400 \\
 40 \times 4 = + 160 \\
 \hline
 2560 \\
 7 \times 4 = + 28 \\
 \hline
 2588
 \end{array}$$

Incluso si las cifras son grandes, el proceso es igual de sencillo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 987 \text{ (} 900 + 80 + 7 \text{)} \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 900 \times 9 = 8100 \\
 80 \times 9 = + 720 \\
 \hline
 8820 \\
 7 \times 9 = + 63 \\
 \hline
 8883
 \end{array}$$

Cuando resuelvas estos problemas por primera vez, es posible que tengas que mirar la página a medida que avanzas para recordar cuál es el problema original. Al principio esto está bien. Pero trate de romper con el hábito de modo que al final conserve el problema enteramente en la memoria.

En la última sección sobre problemas de multiplicación 2 por 1, vimos que los problemas que involucran números que comienzan con ve a veces son especialmente fáciles de resolver. Lo mismo ocurre con los problemas de 3 por 1:

$$\begin{array}{r}
 563 \text{ (} 500 + 60 + 3 \text{)} \\
 \times \quad 6 \\
 \hline
 500 \times 6 = 3000 \\
 60 \times 6 = 360 \\
 3 \times 6 = + 18 \\
 \hline
 3378
 \end{array}$$

Observe que siempre que el primer producto es múltiplo de 1000, el problema de suma resultante no es ningún problema. Esto se debe a que no es necesario llevar ningún número y el dígito de los miles no cambia. Si estuviera resolviendo el problema anterior delante de otra persona, podría decir su primer producto (“tres mil...”) en voz alta con completa confianza en que un número llevado no lo cambiaría a 4000. (Como ventaja adicional, al decir rápidamente el primer dígito, ¡da la ilusión de que has calculado la respuesta completa inmediatamente!) Incluso si estás practicando solo, decir tu primer producto en voz alta libera algo de espacio en la memoria.

mientras trabajas en el problema restante de 2 por 1, que también puedes decir en voz alta; en este caso, "... trescientos setenta y ocho".

Pruebe el mismo enfoque para resolver el siguiente problema, donde el multiplicador es un 5:

$$\begin{array}{r}
 663 \text{ (} 600 + 60 + 3 \text{)} \\
 \times \quad 5 \\
 \hline
 600 \times 5 = 3000 \\
 60 \times 5 = 300 \\
 3 \times 5 = + 15 \\
 \hline
 3315
 \end{array}$$

Debido a que los dos primeros dígitos del número de tres dígitos son pares, puedes decir la respuesta mientras la calculas sin tener que sumar nada. ¿No te gustaría que todos los problemas de multiplicación fueran así de fáciles?

Intensifiquemos el desafío probando un par de problemas que Requiere algo de transporte.

$$\begin{array}{r}
 184 \text{ (} 100 + 80 + 4 \text{)} \\
 \times \quad 7 \\
 \hline
 100 \times 7 = 700 \\
 80 \times 7 = + 560 \\
 \hline
 1260 \\
 4 \times 7 = + 28 \\
 \hline
 1288
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 684 \text{ (} 600 + 80 + 4 \text{)} \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 600 \times 9 = 5400 \\
 80 \times 9 = + 720 \\
 \hline
 6120 \\
 4 \times 9 = + 36 \\
 \hline
 6156
 \end{array}$$

En los siguientes dos problemas necesitas llevar un número al final.
del problema en lugar de al principio:

$$\begin{array}{r}
 648 \text{ (} 600 + 40 + 8 \text{)} \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 600 \times 9 = 5400 \\
 40 \times 9 = + 360 \\
 \hline
 5760 \\
 8 \times 9 = + 72 \\
 \hline
 5832
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 376 \text{ (} 300 + 70 + 6 \text{)} \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 300 \times 4 = 1200 \\
 70 \times 4 = + 280 \\
 \hline
 1480 \\
 6 \times 4 = + 24 \\
 \hline
 1504
 \end{array}$$

La primera parte de cada uno de estos problemas es bastante fácil de calcular mentalmente. La parte difícil viene cuando tienes la respuesta preliminar en tu cabeza mientras calculas la respuesta final. En el caso del primer problema, es fácil sumar $5400 + 360 = 5760$, pero es posible que tengas que repetir 5760 varias veces mientras multiplicas $8 \times 9 = 72$. Luego suma $5760 + 72$. A veces, en esta etapa, Comenzaré a decir mi respuesta en voz alta antes de terminar. Porque sé que tendré que llevar cuando sume $60 + 72$, sé que 5700 se convertirá en 5800, así que digo “cincuenta y ochocientos...” Luego hago una pausa para calcular $60 + 72 = 132$. Porque ya he llevado, digo sólo los dos últimos dígitos, “... ¡treinta y dos!” Y ahí está la respuesta: 5832.

Los siguientes dos problemas requieren que lleves dos números cada uno, por lo que es posible que te lleven más tiempo que los que ya has resuelto. Pero con la práctica conseguirás más rápido:

$$\begin{array}{r}
 489 (400 + 80 + 9) \\
 \times \quad 7 \\
 \hline
 400 \times 7 = 2800 \\
 80 \times 7 = + 560 \\
 \hline
 3360 \\
 9 \times 7 = + 63 \\
 \hline
 3423
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 224 (200 + 20 + 4) \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 200 \times 9 = 1800 \\
 20 \times 9 = + 180 \\
 \hline
 1980 \\
 4 \times 9 = + 36 \\
 \hline
 2016
 \end{array}$$

Cuando aborde estos problemas por primera vez, repita las respuestas de cada parte en voz alta mientras calcula el resto. En el primer problema, por ejemplo, comience diciendo “Dos mil ochocientos más quinientos sesenta” un par de veces en voz alta para reforzar los dos números en la memoria mientras los suma. Repite la respuesta—“treinta y trescientos sesenta”—varias veces mientras multiplicas $9 \times 7 = 63$.

Luego repita “trescientos sesenta más sesenta y tres” en voz alta hasta que calcule la respuesta final de 3423. Si piensa lo suficientemente rápido como para reconocer que sumar $60 + 63$ requerirá que obtenga un 1, puede comenzar a dar la Respuesta final una fracción de segundo antes de que te des cuenta: “¡Treinta y cuatrocientos... veintitrés!”

Terminemos esta sección sobre problemas de multiplicación 3 por 1 con algunos problemas especiales que puedes resolver en una ceniza porque requieren un paso de suma en lugar de dos:

$$\begin{array}{r}
 511 \text{ (500 + 11)} \\
 \times \quad 7 \\
 \hline
 500 \times 7 = 3500 \\
 11 \times 7 = + 77 \\
 \hline
 3577
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 925 \text{ (900 + 25)} \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 900 \times 8 = 7200 \\
 25 \times 8 = + 200 \\
 \hline
 7400
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 825 \text{ (800 + 25)} \\
 \times \quad 3 \\
 \hline
 800 \times 3 = 2400 \\
 25 \times 3 = + 75 \\
 \hline
 2475
 \end{array}$$

En general, si conoce el producto de los dos últimos dígitos del primer número y el multiplicador sin tener que calcularlo (por ejemplo, puede saber que $25 \times 8 = 200$ automáticamente ya que 8 cuartos equivalen a \$2,00), llegar a la respuesta final mucho más rápido. Por ejemplo, si sabes sin calcular que $75 \times 4 = 300$, entonces es fácil calcular 975×4 :

$$\begin{array}{r}
 975 \text{ (900 + 75)} \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 900 \times 4 = 3600 \\
 75 \times 4 = + 300 \\
 \hline
 3900
 \end{array}$$

Para reforzar lo que acabas de aprender, resuelve mentalmente los siguientes problemas de multiplicación de 3 por 1; entonces revisa tu

cálculos y respuestas con los nuestros (al final del libro). Puedo asegurarte por experiencia que hacer cálculos mentales es como andar en bicicleta o escribir a máquina. Puede parecer imposible al principio, pero una vez que lo domines, nunca olvidarás cómo hacerlo.

EXERCISE: 3-BY-1 MULTIPLICATION

- | | | | | |
|--|--|--|--|--|
| 1. $\begin{array}{r} 431 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 2. $\begin{array}{r} 637 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 3. $\begin{array}{r} 862 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ | 4. $\begin{array}{r} 957 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 5. $\begin{array}{r} 927 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ |
| 6. $\begin{array}{r} 728 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$ | 7. $\begin{array}{r} 328 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 8. $\begin{array}{r} 529 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 9. $\begin{array}{r} 807 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 10. $\begin{array}{r} 587 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ |
| 11. $\begin{array}{r} 184 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ | 12. $\begin{array}{r} 214 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ | 13. $\begin{array}{r} 757 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ | 14. $\begin{array}{r} 259 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ | 15. $\begin{array}{r} 297 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ |
| 16. $\begin{array}{r} 751 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 17. $\begin{array}{r} 457 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ | 18. $\begin{array}{r} 339 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ | 19. $\begin{array}{r} 134 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ | 20. $\begin{array}{r} 611 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$ |
| 21. $\begin{array}{r} 578 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 22. $\begin{array}{r} 247 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 23. $\begin{array}{r} 188 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 24. $\begin{array}{r} 968 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 25. $\begin{array}{r} 499 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ |
| 26. $\begin{array}{r} 670 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ | 27. $\begin{array}{r} 429 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$ | 28. $\begin{array}{r} 862 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 29. $\begin{array}{r} 285 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 30. $\begin{array}{r} 488 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ |
| 31. $\begin{array}{r} 693 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 32. $\begin{array}{r} 722 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 33. $\begin{array}{r} 457 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 34. $\begin{array}{r} 767 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$ | 35. $\begin{array}{r} 312 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ |
| 36. $\begin{array}{r} 691 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$ | | | | |

ESTAR ALLÍ O B2: CUADRANDO NÚMEROS DE DOS DÍGITOS

Cuadrar números mentalmente (multiplicar un número por sí mismo) es una de las hazañas de cálculo mental más fáciles pero más impresionantes.

tu puedes hacer. Todavía recuerdo dónde estaba cuando descubrí cómo hacerlo. Tenía trece años y estaba sentado en un autobús camino a visitar a mi padre en el trabajo en el centro de Cleveland. Era un viaje que hacía a menudo, por lo que mi mente empezó a divagar. No estoy seguro de por qué, pero comencé a pensar en los números que suman 20 y me pregunté: ¿qué tan grande podría llegar a ser el producto de dos de esos números?

Empecé en el medio con 10×10 (o 102), cuyo producto es 100. Luego, multipliqué $9 \times 11 = 99$, $8 \times 12 = 96$, $7 \times 13 = 91$, $6 \times 14 = 84$, $5 \times 15 = 75$, $4 \times 16 = 64$, y así sucesivamente. Noté que los productos se hacían más pequeños y su diferencia con respecto a 100 era 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... – o 12, 22, 32, 42, 52, 62, ... (ver tabla a continuación).

Numbers that add to 20		Distance from 10	Their product	Product's difference from 100
10	10	0	100	0
9	11	1	99	1
8	12	2	96	4
7	13	3	91	9
6	14	4	84	16
5	15	5	75	25
4	16	6	64	36
3	17	7	51	49
2	18	8	36	64
1	19	9	19	81

Este patrón me pareció sorprendente. Luego probé números que suman 26 y obtuve resultados similares. Primero calculé $13 \times 13 = 169$, luego calculé $12 \times 14 = 168$, $11 \times 15 = 165$, $10 \times 16 = 160$, $9 \times 17 = 153$, y así sucesivamente. Al igual que antes, las distancias entre estos productos y 169 eran 12, 22, 32, 42, etc. (consulte la tabla a continuación).

En realidad, existe una explicación algebraica simple para este fenómeno (consulte Por qué funcionan estos trucos, [en esta página](#)). En ese momento, no conocía lo suficiente mi álgebra para demostrar que este patrón

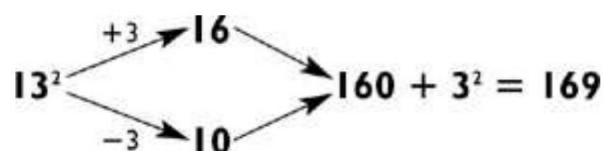
Esto siempre ocurriría, pero experimenté con suficientes ejemplos para convencerme de ello.

Luego me di cuenta de que este patrón podría ayudarme a elevar los números al cuadrado más fácilmente. Supongamos que quisiera elevar al cuadrado el número 13. En lugar de multiplicar 13×13 ,

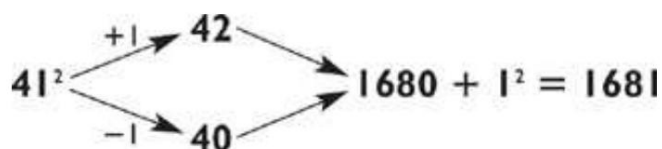
Numbers that add to 26		Distance from 13	Their product	Product's difference from 169
13	13	0	169	0
12	14	1	168	1
11	15	2	165	4
10	16	3	160	9
9	17	4	153	16
8	18	5	144	25

¿Por qué no obtener una respuesta aproximada usando dos números que sean más fáciles de multiplicar pero que también sumen 26? Elegí $10 \times 16 = 160$. Para obtener la respuesta final, simplemente sumé $32 = 9$ (ya que 10 y 16 están cada uno a 3 de 13). Por lo tanto, $13^2 = 160 + 9 = 169$. ¡Genial!

Este método se esquematiza de la siguiente manera:



Ahora veamos cómo funciona esto para otro cuadrado:



Para elevar al cuadrado 41, resta 1 para obtener 40 y suma 1 para obtener 42. Luego multiplica 40×42 . ¡Que no cunda el pánico! Esto es simplemente un problema de multiplicación de 2 por 1 (específicamente, 4×42) disfrazado. Ya que $4 \times 42 = 168$, $40 \times 42 = 1680$. ¡Casi listo! Todo lo que tienes que agregar es

el cuadrado de 1 (el número por el cual subiste y bajaste desde 41), lo que te da $1680 + 1 = 1681$.

¿Puede ser tan fácil elevar al cuadrado un número de dos dígitos? Sí, con este método y un poco de práctica se puede. Y funciona tanto si redondeas inicialmente hacia abajo como hacia arriba. Por ejemplo, examinemos 77^2 , resolviéndolo redondeando hacia arriba y hacia abajo:

$$\begin{array}{c}
 +7 \rightarrow 84 \\
 77^2 \rightarrow \\
 -7 \rightarrow 70
 \end{array}
 \rightarrow 5880 + 7^2 = 5929$$

o

$$\begin{array}{c}
 +3 \rightarrow 80 \\
 77^2 \rightarrow \\
 -3 \rightarrow 74
 \end{array}
 \rightarrow 5920 + 3^2 = 5929$$

En este caso, la ventaja de redondear hacia arriba es que prácticamente habrá terminado tan pronto como haya completado el problema de multiplicación porque es sencillo sumar 9 a un número que termina en 0.

De hecho, para todos los cuadrados de dos dígitos, siempre redondeo hacia arriba o hacia abajo al múltiplo de 10 más cercano. Entonces, si el número a elevar al cuadrado termina en 6, 7, 8 o 9, redondeo hacia arriba, y si el número a elevar al cuadrado termina en 1, 2, 3 o 4, redondeando hacia abajo. (¡Si el número termina en 5, haces ambas cosas!) Con esta estrategia sumarás solo los números 1, 4, 9, 16 o 25 a tu primer cálculo.

Probemos con otro problema. Calcula 56^2 en tu cabeza antes mirando cómo lo hicimos, a continuación:

$$\begin{array}{c}
 +4 \rightarrow 60 \\
 56^2 \rightarrow \\
 -4 \rightarrow 52
 \end{array}
 \rightarrow 3120 + 4^2 = 3136$$

Elevar al cuadrado números que terminan en 5 es aún más fácil. Como siempre redondearás hacia arriba y hacia abajo por 5, los números a multiplicar serán

ambos son múltiplos de 10. Por tanto, la multiplicación y la suma son especialmente sencillas. Hemos calculado 85^2 y 35^2 , a continuación:

$$\begin{array}{c} \nearrow +5 \quad 90 \\ 85^2 \\ \searrow -5 \quad 80 \end{array} \rightarrow 7200 + 5^2 = 7225$$

$$\begin{array}{c} \nearrow +5 \quad 40 \\ 35^2 \\ \searrow -5 \quad 30 \end{array} \rightarrow 1200 + 5^2 = 1225$$

Como vio en [el Capítulo 0](#), cuando eleva al cuadrado un número que termina en 5, redondear hacia arriba y hacia abajo le permite soltar la primera parte de la respuesta inmediatamente y luego terminarla con 25. Por ejemplo, si desea calcular 75^2 , redondear hacia arriba a 80 y hacia abajo a 70 dará como resultado “¡Cincuenta y seiscientos... veinticinco!”

Para los números que terminan en 5, no deberías tener problemas para vencer a alguien con una calculadora, y con un poco de práctica con los otros cuadrados, no pasará mucho tiempo antes de que puedas vencer a la calculadora con cualquier número cuadrado de dos dígitos. Ni siquiera hay que temer a grandes cantidades. Puedes pedirle a alguien que te dé un número realmente grande de dos dígitos, algo por encima de los 90, y sonará como si hubieras elegido un problema imposible de calcular. Pero, de hecho, son aún más fáciles porque te permiten redondear hasta 100.

Digamos que tu audiencia te da 962. Pruébalo tú mismo y luego mira como lo hicimos.

$$\begin{array}{c} \nearrow +4 \quad 100 \\ 96^2 \\ \searrow -4 \quad 92 \end{array} \rightarrow 9200 + 4^2 = 9216$$

¿No fue tan fácil? Deberías haber redondeado hacia arriba de 4 a 100 y hacia abajo de 4 a 92, y luego multiplicar 100×92 para obtener 9200. En este momento

En ese momento puedes decir en voz alta “noventa y doscientas” y luego terminar con “dieciséis” y disfrutar de los aplausos.

EXERCISE: TWO-DIGIT SQUARES

Computadora lo siguiente:

- | | | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. 14^2 | 2. 27^2 | 3. 65^2 | 4. 89^2 | 5. 98^2 |
| 6. 31^2 | 7. 41^2 | 8. 59^2 | 9. 26^2 | 10. 53^2 |
| 11. 21^2 | 12. 64^2 | 13. 42^2 | 14. 55^2 | 15. 75^2 |
| 16. 45^2 | 17. 84^2 | 18. 67^2 | 19. 103^2 | 20. 208^2 |

Zerah Colburn: Cálculos entretenidos

Uno de los primeros calculadores relámpago que aprovechó su talento fue Zerah Colburn (1804-1839), hijo de un granjero estadounidense de Vermont que aprendió las tablas de multiplicar hasta 100 antes de saber leer o escribir. A la edad de seis años, el padre del joven Zerah lo llevó de gira, donde sus actuaciones generaron suficiente capital para enviarlo a la escuela en París y Londres. A los ocho años ya era famoso internacionalmente, realizaba cálculos sobre relámpagos en Inglaterra y fue descrito en el Registro Anual como "el fenómeno más singular en la historia de la mente humana que quizás jamás haya existido". Nada menos que Michael Faraday y Samuel Morse lo admiraban.

No importa a dónde fuera, Colburn enfrentaba a todos los rivales con velocidad y precisión. Nos cuenta en su autobiografía una serie de problemas que le plantearon en New Hampshire en junio de 1811: “¿Cuántos días y

horas desde que comenzó la Era Cristiana, hace 1811 años? Respondido en veinte segundos: 661.015 días, 15.864.360 horas. ¿Cuántos segundos en once años? Respondido en cuatro segundos; 346.896.000”.

Colburn utilizó las mismas técnicas descritas en este libro para calcular completamente en su cabeza los problemas que se le encomendaron. Por ejemplo, factorizaba números grandes en números más pequeños y luego multiplicaba: Colburn una vez multiplicó 21.734×543 factorizando 543 en 181×3 . Luego multiplicó 21.734×181 para llegar a 3.933.854, y finalmente multiplicó esa cifra por 3, para obtener un total de 11.801.562.

Como suele ocurrir con las calculadoras relámpago, el interés por las asombrosas habilidades de Colburn disminuyó con el tiempo, y a la edad de veinte años había regresado a Estados Unidos y se había convertido en predicador metodista. Murió a los treinta y cinco años. Al resumir sus habilidades como calculador relámpago y la ventaja que tal habilidad le proporciona, Colburn reflexionó: “Es cierto que el método... requiere un número mucho mayor de cifras que la regla común, pero se recordará que la pluma, la tinta y el papel cuestan mucho”. Zera muy poco cuando se dedica a una suma”.

POR QUÉ FUNCIONAN ESTOS TRUCOS

Esta sección está dirigida a profesores, estudiantes, matemáticos y cualquier persona que tenga curiosidad sobre por qué funcionan nuestros métodos. Algunas personas pueden encontrar la teoría tan interesante como la aplicación. Afortunadamente, no es necesario comprender por qué funcionan nuestros métodos para saber cómo aplicarlos. Todos los trucos de magia tienen una explicación racional detrás, y los trucos matemáticos no son diferentes. ¡Es aquí donde el matemático revela sus secretos más profundos!

En este capítulo sobre problemas de multiplicación, la ley distributiva es lo que nos permite dividir los problemas en sus partes componentes. La ley distributiva establece que para cualquier número a , b y c :

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

Es decir, el término externo, a , se distribuye, o se aplica por separado, a cada uno de los términos internos, b y c . Por ejemplo, en nuestro primer problema mental de multiplicación de 42×7 , llegamos a la respuesta tratando 42 como $40 + 2$, y luego distribuimos el 7 de la siguiente manera:

$$42 \times 7 = (40 + 2) \times 7 = (40 \times 7) + (2 \times 7) = 280 + 14 = 294$$

Quizás te preguntes por qué la ley distributiva funciona en primer lugar. Para entenderlo intuitivamente, imagina que tienes 7 bolsas, cada una de las cuales contiene 42 monedas, 40 de las cuales son de oro y 2 de plata. ¿Cuántas monedas tienes en total? Hay dos maneras de llegar a la respuesta. En primer lugar, según la definición misma de multiplicación, hay 42×7 monedas. Por otro lado, hay monedas de oro de 40×7 y monedas de plata de 2×7 . Por tanto, tenemos $(40 \times 7) + (2 \times 7)$ monedas en total. Respondiendo nuestra pregunta de dos maneras, tenemos $42 \times 7 = (40 \times 7) + (2 \times 7)$. Observe que los números 7, 40 y 2 podrían reemplazarse por cualquier número (a , b o c) y se aplicaría la misma lógica. ¡Por eso funciona la ley distributiva!

Usando un razonamiento similar con monedas de oro, plata y cobre podemos derivar:

$$(b + c + d) \times a = (b \times a) + (c \times a) + (d \times a)$$

Por lo tanto, para resolver el problema 326×7 , dividimos 326 como $300 + 20 + 6$, luego distribuimos el 7, de la siguiente manera: $326 \times 7 = (300 + 20 + 6) \times 7 = (300 \times 7) + (20 \times 7) + (6 \times 7)$, que luego sumamos para obtener nuestra respuesta.

En cuanto a elevar al cuadrado, el siguiente álgebra justifica mi método. Para cualquier número a y d

$$A^2 = (A + d) \times (A - d) + d^2$$

Aquí, A es el número que se eleva al cuadrado; d puede ser cualquier número, pero elijo que sea la distancia desde A al múltiplo de 10 más cercano. Por lo tanto, para 772, establezco $d = 3$ y nuestra fórmula nos dice que $772 = (77 + 3) \times (77 - 3) + 32 = (80 \times 74) + 9 = 5929$. La siguiente relación algebraica también sirve para explicar mi método de cuadratura:

$$(z + d)^2 = z^2 + 2zd + d^2 = z(z + 2d) + d^2$$

Por lo tanto, al cuadrado 41, establecemos $z = 40$ y $d = 1$ para obtener:

$$41^2 = (40 + 1)^2 = 40 \times (40 + 2) + 12 = 1681$$

Similarmente,

$$(z - d)^2 = z(z - 2d) + d^2$$

Para encontrar 772 cuando $z = 80$ y $d = 3$,

$$772 = (80 - 3)^2 = 80 \times (80 - 6) + 32 = 80 \times 74 + 9 = 5929$$

Capítulo 3

Productos nuevos y mejorados: Multiplicación Intermedia

Las matemáticas se vuelven realmente emocionantes cuando actúas frente a una audiencia. Experimenté mi primera actuación pública en octavo grado, a la edad bastante avanzada de trece años. Muchos matemáticos empiezan incluso antes. Zerah Colburn (1804–1839), por ejemplo, supuestamente podía hacer cálculos relámpago antes de saber leer o escribir, ¡y ya entretenía al público cuando tenía seis años! Cuando tenía trece años, mi profesor de álgebra resolvió un problema en la pizarra cuya respuesta era 1082. No contento con detenerme allí, solté: “¡108 al cuadrado es simplemente 11,664!”

La maestra hizo el cálculo en la pizarra y llegó a la misma respuesta. Pareciendo un poco sorprendida, dijo: “Sí, es cierto. ¿Cómo lo hiciste?” Entonces le dije: “Bajé de 8 a 100 y subí de 8 a 116. Luego multipliqué 116×100 , que es 11,600, y simplemente sumé el cuadrado de 8, para obtener 11,664”.

Ella nunca había visto ese método antes. Yo estaba muy emocionado. Me vinieron a la cabeza pensamientos sobre el “Teorema de Benjamin”. De hecho, creí que había descubierto algo nuevo. Cuando finalmente encontré este método unos años más tarde en un libro de Martin Gardner sobre matemáticas recreativas, *Mathematical Carnival* (1965), ¡me arruinó el día!

Aun así, el hecho de haberlo descubierto por mí mismo fue muy emocionante para mí. a mí.

Tú también puedes impresionar a tus amigos (o profesores) con una multiplicación mental bastante sorprendente. Al final del último capítulo aprendiste cómo multiplicar un número de dos dígitos por sí mismo. En este capítulo aprenderás cómo multiplicar dos números diferentes de dos dígitos, un

tarea desafiante pero más creativa. Luego probarás tu mano (o, más exactamente, tu cerebro) con cuadrados de tres dígitos. No es necesario que sepas resolver problemas de multiplicación de 2 por 2 para abordar cuadrados de tres dígitos, por lo que puedes aprender cualquiera de las dos habilidades primero.

PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN 2 POR 2

Al elevar al cuadrado números de dos cifras, el método es siempre el mismo. Sin embargo, al multiplicar números de dos dígitos, puedes utilizar muchos métodos diferentes para llegar a la misma respuesta. Para mí aquí es donde empieza la diversión.

El primer método que aprenderá es el “método de la suma”, que se puede utilizar para resolver todos los problemas de multiplicación de 2 por 2.

El método de la suma

Para utilizar el método de suma para multiplicar dos números cualesquiera de dos dígitos, todo lo que necesita hacer es realizar dos problemas de multiplicación de 2 por 1 y sumar los resultados. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 46 \\
 \times 42 \quad (40 + 2) \\
 \hline
 40 \times 46 = 1840 \\
 2 \times 46 = + 92 \\
 \hline
 1932
 \end{array}$$

Aquí descompones 42 en 40 y 2, dos números que son fáciles de multiplicar. Luego multiplicas 40×46 , que es solo 4×46 con un 0 adjunto, o 1840. Luego multiplicas $2 \times 46 = 92$. Finalmente, sumas $1840 + 92 = 1932$, como se muestra en el diagrama arriba.

Aquí hay otra forma de resolver el mismo problema:

$$\begin{array}{r}
 46 \text{ (40 + 6)} \\
 \times 42 \\
 \hline
 40 \times 42 = 1680 \\
 6 \times 42 = + 252 \\
 \hline
 1932
 \end{array}$$

El problema aquí es que multiplicar 6×42 es más difícil que multiplicar 2×46 , como en el primer problema. Además, sumar $1680 + 252$ es más difícil que sumar $1840 + 92$. Entonces, ¿cómo decides qué número dividir? Intento elegir el número que producirá el problema de suma más fácil. En la mayoría de los casos, pero no en todos, querrás dividir el número con el último dígito más pequeño porque normalmente produce un segundo número más pequeño para sumar.

Ahora intente resolver los siguientes problemas:

$$\begin{array}{r}
 48 \\
 \times 73 \text{ (70 + 3)} \\
 \hline
 70 \times 48 = 3360 \\
 3 \times 48 = + 144 \\
 \hline
 3504
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 81 \text{ (80 + 1)} \\
 \times 59 \\
 \hline
 80 \times 59 = 4720 \\
 1 \times 59 = + 59 \\
 \hline
 4779
 \end{array}$$

El último problema ilustra por qué los números que terminan en 1 son especialmente atractivos para descomponerse. Si ambos números terminan en el mismo dígito, debes dividir el número mayor como se ilustra a continuación:

$$\begin{array}{r}
 84 \text{ (80 + 4)} \\
 \times 34 \\
 \hline
 80 \times 34 = 2720 \\
 4 \times 34 = + 136 \\
 \hline
 2856
 \end{array}$$

Si un número es mucho mayor que el otro, a menudo vale la pena dividir el número mayor, incluso si tiene un último dígito más grande. Ya verás

Lo que quiero decir cuando intentas el siguiente problema de dos maneras diferentes:

$$\begin{array}{r}
 74 (70 + 4) \\
 \times 13 \\
 \hline
 70 \times 13 = 910 \\
 4 \times 13 = + 52 \\
 \hline
 962
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 74 \\
 \times 13 (10 + 3) \\
 \hline
 10 \times 74 = 740 \\
 3 \times 74 = + 222 \\
 \hline
 962
 \end{array}$$

¿Encontraste que el primer método es más rápido que el segundo? Hice.

Aquí hay otra excepción a la regla de dividir el número con el último dígito más pequeño. Cuando multiplicas un número en los cincuenta por un número par, querrás dividir el número en los cincuenta:

$$\begin{array}{r}
 84 \\
 \times 59 (50 + 9) \\
 \hline
 50 \times 84 = 4200 \\
 9 \times 84 = + 756 \\
 \hline
 4956
 \end{array}$$

El último dígito del número 84 es menor que el último dígito de 59, pero si divides 59, tu producto será un múltiplo de 100, tal como lo es 4200, en el ejemplo anterior. Esto facilita mucho el problema de suma posterior.

Ahora intente resolver un problema sencillo de otro tipo:

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 \times 11 (10 + 1) \\
 \hline
 10 \times 42 = 420 \\
 1 \times 42 = + 42 \\
 \hline
 462
 \end{array}$$

Aunque el cálculo anterior es bastante simple, existe una forma aún más fácil y rápida de multiplicar cualquier número de dos dígitos por 11. Esto es magia matemática en su máxima expresión: no creerás lo que ven tus ojos cuando lo veas (a menos que lo recuerdes de [Capítulo 0](#))!

Así es como funciona. Suponga que tiene un número de dos dígitos cuyos dígitos suman 9 o menos. Para multiplicar este número por 11, simplemente suma los dos dígitos e inserta el total entre los dos dígitos originales. Por ejemplo, para hacer 42×11 , primero haz $4 + 2 = 6$. Si colocas el 6 entre el 4 y el 2, obtienes 462, ¡la respuesta al problema!

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \quad 2 \\ \underline{6} \end{array} = 462$$

Pruebe 54×11 con este método.

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \quad 4 \\ \underline{9} \end{array} = 594$$

¿Qué podría ser más sencillo? Todo lo que tenías que hacer era colocar el 9 entre el 5 y el 4 para darte la respuesta final de 594.

Quizás te preguntes qué sucede cuando los dos números suman un número mayor que 9. En tales casos, aumenta el dígito de las decenas en 1 y luego inserta el último dígito de la suma entre los dos números, como antes. Por ejemplo, al multiplicar 76×11 , $7 + 6 = 13$, aumentas el 7 en 76 a 8 y luego insertas el 3 entre el 8 y el 6, lo que te da 836, la respuesta final. Vea la respuesta diagramada a continuación:

$$\begin{array}{r} 76 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \quad 6 \\ \underline{13} \end{array} = 836$$

Tu turno. Pruebe 68×11 .

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \quad 8 \\ \underline{14} \end{array} = 748$$

Una vez que domines este truco, nunca podrás multiplicar por 11 de ninguna otra manera. Pruebe algunos problemas más y luego verifique sus respuestas al final del libro.

EXERCISE: MULTIPLYING BY 11

$$\begin{array}{r} 1. \quad 35 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 48 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad 94 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

Volviendo al método de la suma, el siguiente problema es un verdadero desafío la primera vez que lo intentas. Intente resolver 89×72 mentalmente y vuelva a mirar el problema si es necesario. Si tienes que empezar de nuevo un par de veces, está bien.

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times 72 \text{ (70 + 2)} \\ \hline 70 \times 89 = 6230 \\ 2 \times 89 = + 178 \\ \hline 6408 \end{array}$$

Si obtuviste la respuesta correcta la primera o segunda vez, date una palmadita en la espalda. Los problemas de multiplicación 2 por 2 realmente no hay nada más difícil que esto. Si no obtuvo la respuesta de inmediato, no se preocupe. En las dos secciones siguientes, le enseñaré algunas estrategias mucho más sencillas para afrontar problemas como este. Pero antes de seguir leyendo, practica el método de la suma en los siguientes problemas de multiplicación.

EXERCISE: 2-BY-2 ADDITION-METHOD
MULTIPLICATION PROBLEMS

$$\begin{array}{r} 1. \quad 31 \\ \times 41 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 27 \\ \times 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad 59 \\ \times 26 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4. \quad 53 \\ \times 58 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5. \quad 77 \\ \times 43 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6. \quad 23 \\ \times 84 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7. \quad 62 \\ \times 94 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8. \quad 88 \\ \times 76 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \quad 92 \\ \times 35 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10. \quad 34 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11. \quad 85 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

El método de la resta

El método de resta realmente resulta útil cuando uno de los números que deseas multiplicar termina en 8 o 9. El siguiente problema ilustra lo que quiero decir:

$$\begin{array}{r} 59 \text{ (} 60 - 1 \text{)} \\ \times 17 \\ \hline 60 \times 17 = 1020 \\ -1 \times 17 = -17 \\ \hline 1003 \end{array}$$

Aunque a la mayoría de las personas les resulta más fácil sumar que restar, normalmente es más fácil restar un número pequeño que sumar un número grande. (Si hubiéramos resuelto este problema mediante el método de la suma, habríamos sumado $850 + 153 = 1003$).

Ahora resolvamos el difícil problema del final de la última sección:

$$\begin{array}{r}
 89 (90 - 1) \\
 \times 72 \\
 \hline
 90 \times 72 = 6480 \\
 -1 \times 72 = -72 \\
 \hline
 6408
 \end{array}$$

¿No fue eso mucho más fácil? Ahora, aquí hay un problema donde un número termina en 8:

$$\begin{array}{r}
 88 (90 - 2) \\
 \times 23 \\
 \hline
 90 \times 23 = 2070 \\
 -2 \times 23 = -46 \\
 \hline
 2024
 \end{array}$$

En este caso, debes tratar 88 como $90 - 2$ y luego multiplicar $90 \times 23 = 2070$. Pero multiplicaste demasiado. ¿Cuánto cuesta? Por 2×23 , o 46 de más. Así que reste 46 de 2070 para llegar a 2024, el respuesta final.

Quiero enfatizar aquí que es importante resolver estos problemas mentalmente y no simplemente mirar cómo lo hicimos en el diagrama. Revísalos y repítelos a ti mismo o incluso en voz alta para reforzar tus pensamientos.

No solo uso el método de resta con números que terminan en 8 o 9, sino también con números superiores a 90 porque 100 es un número muy conveniente para multiplicar. Por ejemplo, si alguien me pidiera que multiplicara 96×73 , inmediatamente redondearía 96 a 100:

$$\begin{array}{r}
 96 (100 - 4) \\
 \times 73 \\
 \hline
 100 \times 73 = 7300 \\
 -4 \times 73 = -292 \\
 \hline
 7008
 \end{array}$$

Cuando el componente de resta de un problema de multiplicación requiere que tomes prestado un número, usar complementos (como aprendimos en el [Capítulo 1](#)) puede ayudarte a llegar a la respuesta más rápidamente. Verá lo que quiero decir a medida que resuelva los problemas siguientes.

Por ejemplo, resta $340 - 78$. Sabemos que la respuesta estará en 200. La diferencia entre 40 y 78 es 38. Ahora toma el complemento de 38 para obtener 62. Y esa es la respuesta, ¡262!

$$\begin{array}{r} 340 \\ - 78 \\ \hline 262 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 78 - 40 = 38 \\ \text{Complement of } 38 = 62 \end{array}$$

Ahora intentemos con otro problema:

$$\begin{array}{r} 88 (90 - 2) \\ \times 76 \\ \hline 90 \times 76 = 6840 \\ -2 \times 76 = -152 \\ \hline \end{array}$$

Hay dos formas de realizar el componente de resta de este problema. El camino "largo" resta 200 y suma 48:

$$\begin{array}{l} 6840 - 152 = 6640 + 48 = 6688 \\ \text{(first subtract 200)} \qquad \text{(then add 48)} \end{array}$$

El camino más corto es darse cuenta de que la respuesta será 66cientos y pico. Para determinar algo, restamos $52 - 40 = 12$ y luego encontramos el complemento de 12, que es 88. Por tanto, la respuesta es 6688.

Prueba este.

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 59 (60 - 1) \\ \hline 60 \times 67 = 4020 \\ -1 \times 67 = -67 \\ \hline 3953 \end{array}$$

Nuevamente, puedes ver que la respuesta será 3900 y algo así.
Como $67 - 20 = 47$, el complemento 53 significa que la respuesta es 3953.

Como te habrás dado cuenta, puedes usar este método con cualquier problema de resta que requiera que tomes prestado un número, no solo aquellos que forman parte de un problema de multiplicación. Todo esto es una prueba más, si la necesitas, de que los complementos son una herramienta muy poderosa en matemáticas. ¡Domina esta técnica y, muy pronto, la gente te felicitará!

EXERCISE: 2-BY-2 SUBTRACTION-METHOD

MULTIPLICATION PROBLEMS

- | | | | |
|---|--|--|---|
| 1. $\begin{array}{r} 29 \\ \times 45 \\ \hline \end{array}$ | 2. $\begin{array}{r} 98 \\ \times 43 \\ \hline \end{array}$ | 3. $\begin{array}{r} 47 \\ \times 59 \\ \hline \end{array}$ | 4. $\begin{array}{r} 68 \\ \times 38 \\ \hline \end{array}$ |
| 5. $\begin{array}{r} 96 \\ \times 29 \\ \hline \end{array}$ | 6. $\begin{array}{r} 79 \\ \times 54 \\ \hline \end{array}$ | 7. $\begin{array}{r} 37 \\ \times 19 \\ \hline \end{array}$ | 8. $\begin{array}{r} 87 \\ \times 22 \\ \hline \end{array}$ |
| 9. $\begin{array}{r} 85 \\ \times 38 \\ \hline \end{array}$ | 10. $\begin{array}{r} 57 \\ \times 39 \\ \hline \end{array}$ | 11. $\begin{array}{r} 88 \\ \times 49 \\ \hline \end{array}$ | |

El método de factorización

El método de factorización es mi método favorito para multiplicar números de dos dígitos, ya que no implica ninguna suma ni resta. Se usa cuando uno de los números en un problema de multiplicación de dos dígitos se puede factorizar en números de un dígito.

Factorizar un número significa descomponerlo en números de un dígito que, cuando se multiplican, dan el número original.

Por ejemplo, el número 24 se puede factorizar en 8×3 o 6×4 .

(También se puede factorizar en 12×2 , pero preferimos usar solo factores de un solo dígito).

Aquí hay algunos otros ejemplos de números factorizados:

$$\begin{aligned} 42 &= 7 \times 6 \quad 63 \\ &= 9 \times 7 \quad 84 = \\ &7 \times 6 \times 2 \text{ o } 7 \times 4 \times 3 \end{aligned}$$

Para ver cómo la factorización facilita la multiplicación, considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 42 \\ \hline \end{array} = 7 \times 6$$

Anteriormente resolvimos este problema multiplicando 46×40 y 46×2 y sumando los productos. Para usar el método de factorización, trata 42 como 7×6 y comienza multiplicando 46×7 , que es 322.

Luego multiplica 322×6 para obtener la respuesta final de 1932. Ya sabes cómo resolver problemas de multiplicación de 2 por 1 y 3 por 1, así que esto no debería ser demasiado difícil:

$$46 \times 42 = 46 \times (7 \times 6) = (46 \times 7) \times 6 = 322 \times 6 = 1932$$

Por supuesto, este problema también podría haberse resuelto invirtiendo los factores de 42:

$$46 \times 42 = 46 \times (6 \times 7) = (46 \times 6) \times 7 = 276 \times 7 = 1932$$

En este caso, es más fácil multiplicar 322×6 que multiplicar 276×7 . En la mayoría de los casos, me gusta usar el factor mayor para resolver el problema inicial de 2 por 1 y reservar el factor menor para el Componente 3 por 1 del problema.

La factorización da como resultado que un problema de multiplicación de 2 por 2 se simplifique a un problema de multiplicación más sencillo de 3 por 1 (o, a veces, 2 por 1). La ventaja del método de factorización en el cálculo mental es que no es necesario retener mucho en la memoria. Veamos otro ejemplo, 75×63 :

$$75 \times 63 = 75 \times (9 \times 7) = (75 \times 9) \times 7 = 675 \times 7 = 4725$$

Como antes, simplificas este problema de 2 por 2 factorizando 63 en 9×7 y luego multiplicando 75 por estos factores. (Por cierto, la razón por la que podemos cambiar los paréntesis en el segundo paso es la ley asociativa de la multiplicación).

$$63 \times 75 = 63 \times (5 \times 5 \times 3) = (63 \times 5) \times 5 \times 3 = 315 \times 5 \times 3 = 1575 \times 3 = 4725$$

Pruebe el siguiente problema para practicar:

$$57 \times 24 = 57 \times 8 \times 3 = 456 \times 3 = 1368$$

Podrías haber factorizado 24 como 6×4 para realizar otro cálculo sencillo:

$$57 \times 24 = 57 \times 6 \times 4 = 342 \times 4 = 1368$$

Compare este enfoque con el método de la suma:

$ \begin{array}{r} 57 \\ \times 24 \text{ (20 + 4)} \\ \hline 20 \times 57 = 1140 \\ 4 \times 57 = + 228 \\ \hline 1368 \end{array} $	or	$ \begin{array}{r} 57 \text{ (50 + 7)} \\ \times 24 \\ \hline 50 \times 24 = 1200 \\ 7 \times 24 = + 168 \\ \hline 1368 \end{array} $
---	----	---

Con el método de suma, debes realizar dos problemas de 2 por 1 y luego sumar. Con el método de factorización, solo tienes dos problemas de multiplicación: uno de 2 por 1 y uno de 3 por 1, y listo. El método de factorización suele ser más fácil para la memoria.

¿Recuerdas ese desafiante problema de multiplicación anterior en este capítulo? Aquí está de nuevo:

$$\begin{array}{r}
 89 \\
 \times 72 \\
 \hline
 \end{array}$$

Abordamos ese problema con bastante facilidad con el método de resta, pero la factorización funciona aún más rápido:

$$89 \times 72 = 89 \times 9 \times 8 = 801 \times 8 = 6408$$

El problema es especialmente fácil debido al 0 en medio de 801. Nuestro siguiente ejemplo ilustra que a veces vale la pena factorizar los números en un orden que aproveche esta situación. Veamos dos formas de calcular 67×42 :

$$\begin{aligned} 67 \times 42 &= 67 \times 7 \times 6 = 469 \times 6 = 2814 \\ 67 \times 42 &= 67 \times 6 \times 7 = 402 \times 7 = 2814 \end{aligned}$$

Por lo general, debes factorizar 42 para convertirlo en 7×6 , como en el primer ejemplo, siguiendo la regla de usar primero el factor mayor. Pero el problema es más fácil de resolver si factorizas 42 en 6×7 porque crea un número con un 0 en el centro, que es más fácil de multiplicar.

A esos números los llamo productos amigables.

Busque el producto amigable en el problema realizado de dos maneras a continuación:

$$\begin{aligned} 43 \times 56 &= 43 \times 8 \times 7 = 344 \times 7 = 2408 \\ 43 \times 56 &= 43 \times 7 \times 8 = 301 \times 8 = 2408 \end{aligned}$$

¿Creías que la segunda forma era más fácil?

Cuando se utiliza el método de factoring, vale la pena encontrar productos amigables siempre que sea posible. La siguiente lista debería ayudar. No espero que lo memorices sino que te familiarices con él. Con la práctica, podrá detectar productos amigables con más frecuencia y la lista será más significativa.

Números con productos amigables

- 12: $12 \times 9 = 108$
- 13: $13 \times 8 = 104$
- 15: $15 \times 7 = 105$
- 17: $17 \times 6 = 102$
- 18: $18 \times 6 = 108$

$$21: 21 \times 5 = 105$$

$$23: 23 \times 9 = 207$$

$$25: 25 \times 4 = 100, 25 \times 8 = 200 \quad 26:$$

$$26 \times 4 = 104, 26 \times 8 = 208 \quad 27: 27 \times$$

$$4 = 108 \quad 29: 29 \times 7$$

$$= 203 \quad 34: 34 \times 3 =$$

$$102, 34 \times 6 = 204, 34 \times 9 = 306 \quad 35: 35 \times 3 = 105 \quad 36:$$

$$36 \times 3 = 108 \quad 38:$$

$$38 \times 8 = 304 \quad 41:$$

$$41 \times 5 = 205$$

$$43: 43 \times 7 = 301$$

$$44: 44 \times 7 = 308$$

$$45: 45 \times 9 = 405$$

$$51: 51 \times 2 = 102, 51 \times 4 = 204, 51 \times 6 = 306, 51 \times 8 = 408 \quad 52: 52 \times 2$$

$$= 104, 52 \times 4 = 208 \quad 53: 53 \times 2 =$$

$$106 \quad 54: 54 \times 2 =$$

$$108 \quad 56: 56 \times 9 =$$

$$504$$

$$61: 61 \times 5 = 305$$

$$63: 63 \times 8 = 504$$

$$67: 67 \times 3 = 201, 67 \times 6 = 402, 67 \times 9 = 603 \quad 68: 68$$

$$\times 3 = 204, 68 \times 6 = 408 \quad 69: 69 \times 3$$

$$= 207 \quad 72: 72 \times 7 =$$

$$504 \quad 76: 76 \times 4 =$$

$$304, 76 \times 8 = 608 \quad 77: 77 \times 4 = 308$$

$$78: 78 \times 9 = 702$$

$$81: 81 \times 5 = 405$$

$$84: 84 \times 6 = 504$$

$$86: 86 \times 7 = 802$$

$$88: 88 \times 8 = 704$$

$$89: 89 \times 9 = 801$$

Anteriormente en este capítulo aprendiste lo fácil que es multiplicar números por 11. Generalmente vale la pena usar el método de factorización cuando uno de los números es múltiplo de 11, como en los ejemplos siguientes:

$$52 \times 33 = 52 \times 11 \times 3 = 572 \times 3 = 1716 \quad 83 \times 66 = 83$$

$$\times 11 \times 6 = 913 \times 6 = 5478$$

EXERCISE: 2-BY-2 FACTORING-METHOD
MULTIPLICATION PROBLEMS

$$\begin{array}{r} 1. \quad 27 \\ \times 14 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 86 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad 57 \\ \times 14 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4. \quad 81 \\ \times 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5. \quad 56 \\ \times 29 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6. \quad 83 \\ \times 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7. \quad 72 \\ \times 17 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8. \quad 85 \\ \times 42 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \quad 33 \\ \times 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10. \quad 62 \\ \times 77 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11. \quad 45 \\ \times 36 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12. \quad 48 \\ \times 37 \\ \hline \end{array}$$

ACERCARSE A LA MULTIPLICACIÓN DE FORMA CREATIVA

Mencioné al principio del capítulo que los problemas de multiplicación son divertidos porque se pueden resolver de muchas maneras. Ahora que sabes a qué me refiero, apliquemos los tres métodos explicados en este capítulo a un solo problema, 73×49 . Comenzaremos usando el método de la suma:

$$\begin{array}{r} 73 (70 + 3) \\ \times 49 \\ \hline 70 \times 49 = 3430 \\ 3 \times 49 = + 147 \\ \hline 3577 \end{array}$$

Ahora prueba el método de resta:

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 49 (50 - 1) \\ \hline 50 \times 73 = 3650 \\ -1 \times 73 = - 73 \\ \hline 3577 \end{array}$$

Tenga en cuenta que los dos últimos dígitos de la resta se pueden obtener sumando $50 + (\text{complemento de } 73) = 50 + 27 = 77$ o simplemente tomando el complemento de $(73 - 50) = \text{complemento de } 23 = 77$.

Finalmente, prueba el método de factorización:

$$73 \times 49 = 73 \times 7 \times 7 = 511 \times 7 = 3577$$

¡Felicidades! Has dominado la multiplicación 2 por 2 y ahora tienes todas las habilidades básicas que necesitas para ser un calculador mental rápido.

¡Todo lo que necesitas para convertirte en un calculador de relámpagos es más práctica!

EJERCICIO: MULTIPLICACIÓN GENERAL 2 POR 2: ¡TODO VALE!

Muchos de los siguientes ejercicios se pueden resolver mediante más de un método. Intente calcularlos de tantas maneras como pueda imaginar y luego verifique sus respuestas y cálculos al final del libro.

Nuestras respuestas sugieren varias formas en que el problema se puede resolver matemáticamente, comenzando con el que creo que es el método más sencillo.

- | | | | | |
|---|---|---|---|--|
| 1. $\begin{array}{r} 53 \\ \times 39 \\ \hline \end{array}$ | 2. $\begin{array}{r} 81 \\ \times 57 \\ \hline \end{array}$ | 3. $\begin{array}{r} 73 \\ \times 18 \\ \hline \end{array}$ | 4. $\begin{array}{r} 89 \\ \times 55 \\ \hline \end{array}$ | 5. $\begin{array}{r} 77 \\ \times 36 \\ \hline \end{array}$ |
| 6. $\begin{array}{r} 92 \\ \times 53 \\ \hline \end{array}$ | 7. $\begin{array}{r} 87 \\ \times 87 \\ \hline \end{array}$ | 8. $\begin{array}{r} 67 \\ \times 58 \\ \hline \end{array}$ | 9. $\begin{array}{r} 56 \\ \times 37 \\ \hline \end{array}$ | 10. $\begin{array}{r} 59 \\ \times 21 \\ \hline \end{array}$ |

Los siguientes 2 por 2 ocurren como subproblemas de problemas que aparecen más adelante cuando hacemos 3 por 2, 3 por 3 y 5 por 5. Puede resolver estos problemas ahora para practicar y consultarlos cuando los utilice en los problemas más importantes.

11.	37 × 72	12.	57 × 73	13.	38 × 63	14.	43 × 76	15.	43 × 75
16.	74 × 62	17.	61 × 37	18.	36 × 41	19.	54 × 53	20.	53 × 53
21.	83 × 58	22.	91 × 46	23.	52 × 47	24.	29 × 26	25.	41 × 15
26.	65 × 19	27.	34 × 27	28.	69 × 78	29.	95 × 81	30.	65 × 47
31.	65 × 69	32.	95 × 26	33.	41 × 93				

CUADRADOS DE TRES DÍGITOS

Elevar al cuadrado números de tres dígitos es una hazaña impresionante de prestidigitación mental. Así como se elevan al cuadrado números de dos dígitos redondeando hacia arriba o hacia abajo al múltiplo de 10 más cercano, para elevar al cuadrado números de tres dígitos se redondean hacia arriba o hacia abajo al múltiplo de 100 más cercano.

Toma 193:

$$\begin{array}{c}
 \nearrow +7 \rightarrow 200 \\
 193^2 \quad \searrow -7 \rightarrow 186 \\
 \rightarrow 37,200 + 7^2 = 37,249
 \end{array}$$

Al redondear hacia arriba a 200 y hacia abajo a 186, has transformado un problema de multiplicación de 3 por 3 en un problema mucho más simple de 3 por 1. Después de todo, 200×186 es sólo $2 \times 186 = 372$ con dos ceros adjuntos.

¡Casi termino! Ahora todo lo que tienes que sumar es $72 = 49$ para llegar a 37,249.

Ahora intenta elevar al cuadrado 706:

$$\begin{array}{c}
 \nearrow +6 \quad 712 \\
 706^2 \quad \searrow -6 \quad 700 \\
 \nearrow \quad \searrow \\
 498,400 + 6^2 = 498,436
 \end{array}$$

Redondear hacia abajo de 6 a 700 requiere redondear de 6 a 712. Dado que $712 \times 7 = 4984$ (un problema simple de 3 por 1), $712 \times 700 = 498,400$. Después de sumar $6^2 = 36$, llegas a 498,436.

Estos últimos problemas no son muy difíciles porque no implican ninguna suma real. Además, te sabes de memoria las respuestas a 62 y 72. Cuadrar un número que está más alejado de un múltiplo de 100 es una propuesta más difícil. Pruebe suerte en 3142:

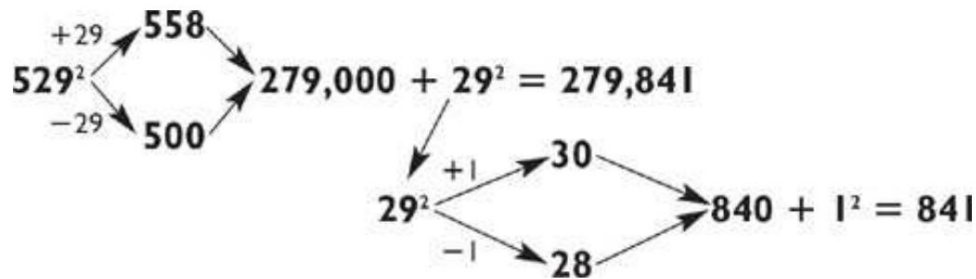
$$\begin{array}{c}
 \nearrow +14 \quad 328 \\
 314^2 \quad \searrow -14 \quad 300 \\
 \nearrow \quad \searrow \\
 98,400 + 14^2 = 98,596
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \nearrow +4 \quad 18 \\
 14^2 \quad \searrow -4 \quad 10 \\
 \nearrow \quad \searrow \\
 180 + 4^2 = 196
 \end{array}$$

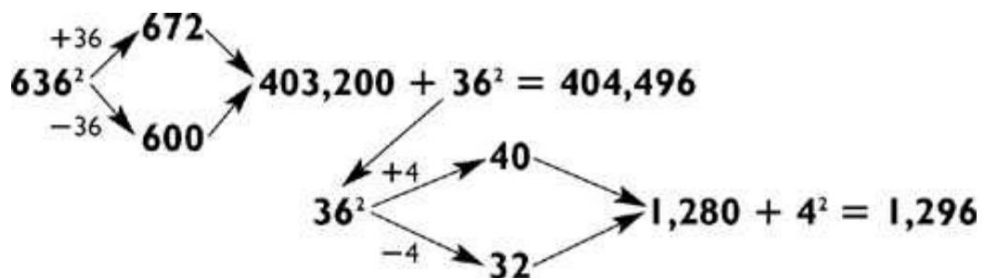
Para este cuadrado de tres dígitos, baje de 14 a 300 y suba de 14 a 328, luego multiplique $328 \times 3 = 984$. Agregue dos ceros para llegar a 98,400. Luego suma el cuadrado de 14. Si $14^2 = 196$ te llega en forma de ceniza (a través de la memoria o del cálculo), estás en buena forma. Simplemente agregue $98,400 + 196$ para llegar a 98,596. Si necesita tiempo para calcular 14^2 , repita el número 98,400 varias veces antes de continuar. (De lo contrario, podrías calcular $14^2 = 196$ y olvidar a qué número sumarlo).

Cuanto más te alejes de un múltiplo de 100, más

Resulta complicado elevar al cuadrado un número de tres cifras. Pruebe 5292:

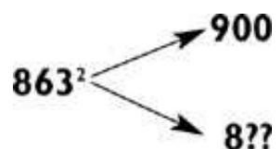


Si tiene una audiencia a la que desea impresionar, puede decir 279.000 en voz alta antes de calcular 292. Pero esto no funcionará para todos los problemas. Por ejemplo, intenta elevar al cuadrado 636:



Ahora tu cerebro realmente está funcionando, ¿verdad? La clave aquí es repetirte 403,200 varias veces. Luego eleva al cuadrado 36 para obtener 1296 de la forma habitual. La parte difícil viene en sumar 1.296 a 403.200. Hazlo un dígito a la vez, de izquierda a derecha, para llegar a tu respuesta de 404,496. Créame, a medida que se familiarice con los cuadrados de dos dígitos, estos problemas de tres dígitos se volverán más fáciles.

Aquí hay un problema aún más difícil, 8632:



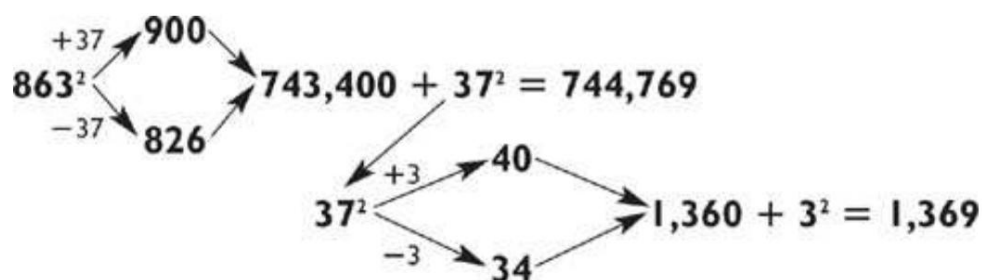
El primer problema es decidir qué números multiplicar. Claramente uno de los números será 900 y el otro número estará en los 800. ¿Pero qué número? Puedes calcularlo de dos maneras:

1. Por las malas: la diferencia entre 863 y 900 es 37 (el complemento de 63). Resta 37 de 863 para llegar a 826.

2. La forma más fácil: duplica el número 63 para obtener 126 y toma los dos últimos dígitos para obtener 826.

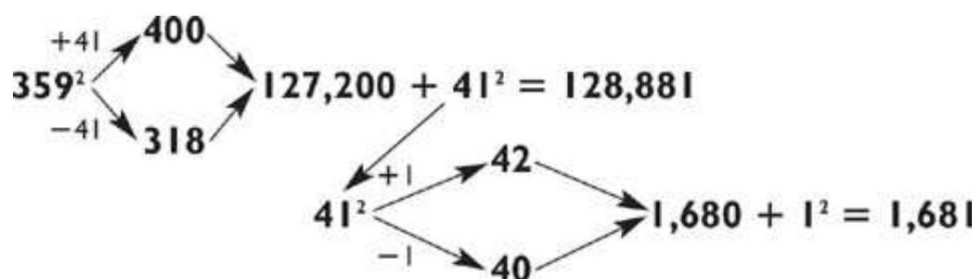
He aquí por qué funciona la forma fácil. Debido a que ambos números están a la misma distancia de 863, su suma debe ser el doble de 863, o 1726. Uno de tus números es 900, por lo que el otro debe ser 826.

Luego calculas el problema de esta manera:



Si te resulta imposible recordar 743.400 después de elevar al cuadrado 37, no temas. En un capítulo posterior, aprenderá un sistema de memoria que hará que recordar esos números sea mucho más fácil.

Intenta elevar al cuadrado 359, el problema más difícil hasta ahora:



Para obtener 318, resta 41 (el complemento de 59) de 359 o multiplica $2 \times 59 = 118$ y usa los dos últimos dígitos. Luego multiplica $400 \times 318 = 127,200$. Sumar 412, o 1,681, da 128,881. ¡Uf! ¡No hay nada más difícil que eso! Si lo hiciste bien la primera vez, ¡haz una reverencia!

Terminemos esta sección con un gran problema que es fácil de resolver, 9872:

¿Qué hay detrás de la puerta número 1?

t La castaña matemática de 1991 que atrapó a todos. Hopping Mad fue un artículo de la revista Parade de Marilyn vos Savant, la mujer que figura en el Libro Guinness de los Récords por tener el coeficiente intelectual más alto del mundo. La paradoja ha llegado a ser conocida como el problema de Monty Hall, y dice así.

Eres concursante de Let's Make a Deal. Monty Hall te permite elegir una de tres puertas; detrás de una de estas puertas está el gran premio, detrás de las otras dos están las cabras. Eliges la puerta número 2. Pero antes de que Monty revele el premio de tu elección, te muestra lo que no elegiste detrás de la puerta número 3. Es una cabra.

Ahora, a su manera tentadora, Monty te da otra opción. ¿Quieres quedarte con la puerta número 2 o quieres arriesgarte a ver qué hay detrás de la puerta número 1? ¿Qué deberías hacer?

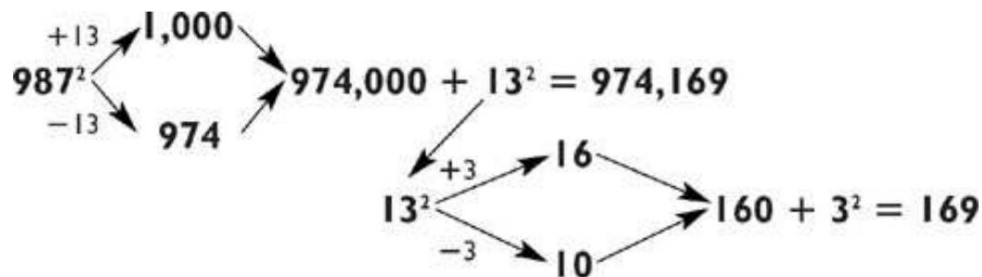
Suponiendo que Monty sólo vaya a revelar dónde no está el gran premio, siempre abrirá una de las puertas del consuelo.

Esto deja dos puertas, una con el gran premio y otra con otro consuelo. Las probabilidades ahora son de 50 a 50 para tu elección, ¿verdad?

¡Equivocado! Las probabilidades de que hayas elegido correctamente la primera vez siguen siendo 1 entre 3. La probabilidad de que el gran premio esté detrás de la otra puerta aumenta a 2 entre 3 porque la probabilidad debe sumar 1.

Por lo tanto, al cambiar de puerta, ¡duplicas las probabilidades de ganar! (El problema supone que Monty siempre le dará al jugador la opción de cambiar, que siempre revelará una puerta no ganadora y que cuando su primera elección sea correcta, elegirá una puerta no ganadora al azar.) Piense en jugar con diez. puertas y después de elegir, revela otras ocho puertas no ganadoras. Aquí, tus instintos probablemente te dirían que

cambiar. La gente confunde este problema con una variante: si Monty Hall no sabe dónde está el gran premio y revela la puerta número 3, que resulta que contiene una cabra (aunque podría haber contenido el premio), entonces la puerta número 1 tiene un 50 por ciento de posibilidades de ser correcta. Este resultado es tan contradictorio que Marilyn vos Savant recibió montones de cartas, muchas de ellas de científicos e incluso matemáticos, diciéndole que no debería escribir sobre matemáticas. Todos estaban equivocados.



EXERCISE: THREE-DIGIT SQUARES

- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 1. 409² | 2. 805² | 3. 217² | 4. 896² |
| 5. 345² | 6. 346² | 7. 276² | 8. 682² |
| 9. 431² | 10. 781² | 11. 975² | |

CUBIZAR

Terminamos este capítulo con un nuevo método para elevar al cubo números de dos dígitos. (Recuerde que el cubo de un número es ese número multiplicado por sí mismo dos veces. Por ejemplo, 5 al cubo (denotado 5^3) es igual a $5 \times 5 \times 5 = 125$.) Como verá, esto no es mucho más difícil que multiplicar dos números de dígitos. El método se basa en la observación algebraica de que

$$A^3 = (A - d)A(A + d) + d^2A$$

donde d es cualquier número. Al igual que cuando elevamos al cuadrado números de dos dígitos, elijo d como la distancia al múltiplo de diez más cercano. Por ejemplo, al elevar al cuadrado 13, dejamos $d = 3$, lo que da como resultado:

$$133 = (10 \times 13 \times 16) + (32 \times 13)$$

Como $13 \times 16 = 13 \times 4 \times 4 = 52 \times 4 = 208$ y $9 \times 13 = 117$, tenemos

$$133 = 2080 + 117 = 2197$$

¿Qué tal el cubo de 35? Haciendo $d = 5$, obtenemos

$$353 = (30 \times 35 \times 40) + (52 \times 35)$$

Como $30 \times 35 \times 40 = 30 \times 1400 = 42\,000$ y $35 \times 5 \times 5 = 175 \times 5 = 875$, obtenemos

$$353 = 42.000 + 875 = 42.875$$

Al elevar al cubo 49, dejamos $d = 1$ para redondear a 50. Aquí

$$493 = (48 \times 49 \times 50) + (12 \times 49)$$

Podemos resolver 48×49 mediante el método de factorización, pero para este tipo de problemas prefiero usar el método de aproximación, que se describirá en el Capítulo 8. (Continúe y [mírelo](#) ahora, si lo desea). !)

Usando ese método, obtenemos $48 \times 49 = (50 \times 47) + (1 \times 2) = 2352$.

Multiplicando esto por 50, obtenemos 117,600 y por lo tanto

$$493 = 117.600 + 49 = 117.649$$

Aquí hay uno más grande. Prueba el cubo de 92.

$$923 = (90 \times 92 \times 94) + (22 \times 92)$$

Si eres rápido elevando al cuadrado números de dos dígitos, entonces podrías resolver $92 \times 94 = 932 - 1 = 8648$, o podrías usar la fórmula cercana.

método juntos, lo que da como resultado $92 \times 94 = (90 \times 96) + (2 \times 4) = 8648$. Multiplicando esto por 9 (como se describe al comienzo del Capítulo 8), obtenemos $9 \times (8,600 + 48) = 77,400 + 432 = 77,832$, y por lo tanto $90 \times 92 \times 94 = 778,320$. Como $4 \times 92 = 368$, obtenemos

$$923 = 778,320 + 368 = 778,688$$

Observamos que cuando se utiliza el método de conjunto cercano para los problemas de multiplicación que surgen al elevar al cubo números de dos dígitos, el producto pequeño que se suma será (dependiendo de si $d = 1, 2, 3, 4$ o 5) $1 \times 2 = 2$, $2 \times 4 = 8$, $3 \times 6 = 18$, $4 \times 8 = 32$ o $5 \times 10 = 50$. Terminemos con el cubo de 96.

$$963 = (92 \times 96 \times 100) + (42 \times 96)$$

El producto $92 \times 96 = 8,832$ se puede hacer de muchas maneras diferentes. Para celebrar el final de este capítulo, hagamos algunos de ellos. Comenzaré con lo que considero el camino más difícil y terminaré con lo que considero el más fácil. Por el método de la suma, $(90 + 2) \times 96 = 8,640 + 192 = 8,832$; por el método de la resta, $92 \times (100 - 4) = 9,200 - 368 = 8,832$; por el método de factorización, $92 \times 6 \times 4 \times 4 = 552 \times 4 \times 4 = 2,208 \times 4 = 8,832$; elevando al cuadrado, $942 - 22 = 8,836 - 4 = 8,832$; por el método cercano con base 90, $(90 \times 98) + (2 \times 6) = 8,820 + 12 = 8,832$; y por el método cercano con base 100, $(100 \times 88) + (-8 \times -4) = 8,800 + 32 = 8,832$.

El producto $42 \times 96 = 1536$ también se puede hacer de diferentes maneras, como $96 \times 4 \times 4 = 384 \times 4 = 1536$, o como $16 \times (100 - 4) = 1600 - 64 = 1536$. Finalmente, como $8,832 \times 100 = 883,200$, tenemos

$$963 = 883,200 + 1,536 = 884,736$$

EXERCISE: TWO-DIGIT CUBES

- | | | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1. 12^3 | 2. 17^3 | 3. 21^3 | 4. 28^3 | 5. 33^3 |
| 6. 39^3 | 7. 40^3 | 8. 44^3 | 9. 52^3 | 10. 56^3 |
| 11. 65^3 | 12. 71^3 | 13. 78^3 | 14. 85^3 | 15. 87^3 |
| 16. 99^3 | | | | |

Capítulo 4

Divide y conquistarás: División mental

La división mental es una habilidad particularmente útil, tanto en los negocios como en la vida diaria. ¿Cuántas veces a la semana te enfrentas a situaciones que te exigen dividir las cosas en partes iguales, como una cuenta en un restaurante? Esta misma habilidad resulta útil cuando quieres calcular el coste por unidad de una caja de comida para perros en oferta, o dividir el bote en el póquer, o calcular cuántos galones de gasolina puedes comprar con un billete de 20 dólares. La capacidad de dividir mentalmente puede ahorrarte el inconveniente de tener que sacar una calculadora cada vez que necesite calcular algo.

Con la división mental, el método de cálculo de izquierda a derecha cobra importancia. Este es el mismo método que todos aprendimos en la escuela, por lo que harás lo que te resulte natural. Recuerdo que cuando era niño pensaba que este método de división de izquierda a derecha es la forma en que se debe hacer toda la aritmética. A menudo he especulado que si las escuelas hubieran podido encontrar una manera de enseñar la división de derecha a izquierda, ¡probablemente lo habrían hecho!

DIVISIÓN DE UN DÍGITO

El primer paso al dividir mentalmente es calcular cuántos dígitos habrá en tu respuesta. Para ver lo que quiero decir, pruebe el siguiente problema de tamaño:

$$179 \div 7$$

Para resolver $179 \div 7$, buscamos un número, Q , tal que 7 multiplicado por Q es 179. Ahora, como 179 se encuentra entre $7 \times 10 = 70$ y $7 \times 100 = 700$, Q debe estar entre 10 y 100, lo que significa que nuestra respuesta debe ser un número de dos dígitos. Sabiendo eso, primero determinamos el múltiplo más grande de 10 que se puede multiplicar por 7 cuya respuesta es inferior a 179. Sabemos que $7 \times 20 = 140$ y $7 \times 30 = 210$, por lo que nuestra respuesta debe estar en los veinte. En este punto podemos decir el número 20, ya que esa parte de nuestra respuesta ciertamente no cambiará. Luego restamos $179 - 140 = 39$. Nuestro problema ahora se ha reducido al problema de división $39 \div 7$. Dado que $7 \times 5 = 35$, que está a 4 de 39, tenemos el resto de nuestra respuesta, es decir, 5 con un resto de 4, o $5 \frac{4}{7}$. En total tenemos nuestra respuesta, 25 con un resto de 4, o si lo prefieres, $25 \frac{4}{7}$.

Así es como se ve el proceso:

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 7 \overline{)179} \\
 \underline{-140} \\
 39 \\
 \underline{-35} \\
 4 \leftarrow \text{remainder}
 \end{array}$$

Answer: 25 with a remainder of 4, or $25 \frac{4}{7}$

Intentemos un problema de división similar usando el mismo método de cálculo mental:

$$675 \div 8$$

Como antes, dado que 675 se encuentra entre $8 \times 10 = 80$ y $8 \times 100 = 800$, tu respuesta debe ser inferior a 100 y, por lo tanto, es un número de dos dígitos. Para dividir 8 entre 675, observa que $8 \times 80 = 640$ y $8 \times 90 = 720$. Por lo tanto, tu respuesta es 80 y tantos. Pero ¿qué es ese "algo"? Para averiguarlo, resta 640 de 675 para obtener el resto de

35. Después de decir el 80, nuestro problema se ha reducido a $35 \div 8$.

Como $8 \times 4 = 32$, la respuesta final es 84 con un resto de 3, o $84\frac{3}{8}$. Ilustramos este problema de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 84 \\
 8 \overline{)675} \\
 \underline{-640} \\
 35 \\
 \underline{-32} \\
 3 \leftarrow \text{remainder}
 \end{array}$$

Answer: 84 with a remainder of 3, or $84\frac{3}{8}$

Como la mayoría de los cálculos mentales, la división puede considerarse como un proceso de simplificación. Cuanto más calculas, más sencillo se vuelve el problema. Lo que comenzó como $675 \div 8$ se simplificó a un problema más pequeño, $35 \div 8$.

Ahora intentemos un problema de división que resulte en un número de tres dígitos.
 respuesta:

$$947 \div 4$$

Esta vez, su respuesta tendrá tres dígitos porque 947 se encuentra entre $4 \times 100 = 400$ y $4 \times 1000 = 4000$. Por lo tanto, primero debemos encontrar el múltiplo más

grande de 100 que se pueda comprimir en 947. Como $4 \times 200 = 800$, nuestra La respuesta definitivamente está en los 200, ¡así que adelante y dílo! Restar 800 de 947 nos da nuestro nuevo problema de división, $147 \div 4$. Como $4 \times 30 = 120$, ahora podemos decir 30.

Después de restar 120 de 147, calculamos $27 \div 4$ para obtener el resto de la respuesta: 6 con un resto de 3. En total, tenemos 236 con un resto de 3, o $236\frac{3}{4}$.

$$\begin{array}{r}
 236 \\
 4 \overline{)947} \\
 \underline{-800} \\
 147 \\
 \underline{-120} \\
 27 \\
 \underline{-24} \\
 3 \leftarrow \text{remainder}
 \end{array}$$

$$\text{Answer: } 236 \frac{3}{4}$$

El proceso es igual de sencillo al dividir un número de un dígito en un número de cuatro dígitos, como en nuestro siguiente ejemplo.

$$2196 \div 5$$

Aquí la respuesta estará en centenas porque 2196 está entre $5 \times 100 = 500$ y $5 \times 1000 = 5000$. Después de restar $5 \times 400 = 2000$, podemos decir el 400, y nuestro problema se ha reducido a $196 \div 5$, lo que puede resolverse como en los ejemplos anteriores.

$$\begin{array}{r}
 439 \\
 5 \overline{)2196} \\
 \underline{-2000} \\
 196 \\
 \underline{-150} \\
 46 \\
 \underline{-45} \\
 1
 \end{array}$$

$$\text{Answer: } 439 \frac{1}{5}$$

En realidad, existe una forma mucho más sencilla de solucionar este último problema. Podemos simplificar nuestro problema duplicando ambos números. Como $2196 \times 2 = 4392$, tenemos $2196 \div 5 = 4392 \div 10 = 439\frac{2}{10}$. 439,2 o Veremos más atajos de división en la siguiente sección.

EXERCISE: ONE-DIGIT DIVISION

1. $318 \div 9$

2. $726 \div 5$

3. $428 \div 7$

4. $289 \div 8$

5. $1328 \div 3$

6. $2782 \div 4$

LA REGLA DE ORO"

Al dividir mentalmente en lugar de hacerlo en papel, puede que le resulte difícil recordar partes de la respuesta mientras continúa calculando. Una opción, como has visto, es decir la respuesta en voz alta sobre la marcha. Pero para lograr un mayor efecto dramático, tal vez prefieras, como yo, tener la respuesta en tus dedos y decirla toda junto al final. En ese caso, puedes tener problemas para recordar dígitos mayores que cinco si, como la mayoría de nosotros, solo tienes dedos en cada mano.

La solución es utilizar una técnica especial, basada en el lenguaje de signos, a la que yo llamo regla general. Es más eficaz para recordar números de tres dígitos y más. Esta técnica no sólo es útil en este capítulo sino que también será útil (perdón por el juego de palabras) en capítulos posteriores que traten problemas más grandes y números más largos para recordar.

Ya sabes que para representar los números del 0 al 5, todo lo que tienes que hacer es levantar la cantidad equivalente de dedos de tu mano. Cuando involucras tu pulgar, es igual de fácil representar los números del 6 al 9. Estas son las reglas del "pulgar":

- Para conservar el 6, coloque el pulgar encima del meñique.
- Para conservar el 7, coloque el pulgar encima del dedo anular.
- Para conservar el 8, coloque el pulgar encima del dedo medio.
- Para mantener el 9, coloque el pulgar encima del dedo índice.

Con respuestas de tres dígitos, sostenga el dígito de las centenas en su mano izquierda y el dígito de las decenas a su derecha. Cuando llegas a los

dígito, ha llegado al final del problema (excepto por un posible resto). Ahora diga el número de su mano izquierda, el número de su mano derecha, el dígito que acaba de calcular y el resto (en su cabeza). Listo, ¡has dicho tu respuesta!

Para practicar, intenta calcular el siguiente problema de división de cuatro dígitos:

$$\begin{array}{r}
 4579 \div 6 \\
 \hline
 763 \\
 6 \overline{)4579} \\
 \underline{-4200} \\
 379 \\
 \underline{-360} \\
 19 \\
 \underline{-18} \\
 1
 \end{array}$$

Answer: $763\frac{1}{6}$

Al usar la regla del "pulgar" para recordar la respuesta, sostendrá el 7 en su mano izquierda colocando el pulgar y el anular juntos y el 6 en su mano derecha colocando el pulgar y el meñique juntos. Una vez que hayas calculado el dígito de las unidades (que es 3) y el resto (que es 1), puedes "leer" la respuesta final con tus manos de izquierda a derecha: "siete... seis... tres con un resto de uno, o una sexta parte".

Algunos problemas de división de cuatro dígitos arrojan respuestas de cuatro dígitos. En ese caso, como solo tienes dos manos, tendrás que decir en voz alta el dígito de los millares de la respuesta y utilizar la regla general para recordar el resto de la respuesta. Por ejemplo:

$$8352 \div 3$$

$$8352 \div 3$$

$$\begin{array}{r}
 2784 \\
 3 \overline{)8352} \\
 \underline{-6000} \\
 2352 \\
 \underline{-2100} \\
 252 \\
 \underline{-240} \\
 12 \\
 \underline{-12} \\
 0
 \end{array}$$

Answer: 2784

Para este problema, divides 3 entre 8 para obtener el dígito de mil de 2, di "dos mil" en voz alta y luego divides 3 entre 2352 de la forma habitual.

DIVISIÓN DE DOS DÍGITOS

Esta sección asume que ya dominas el arte de dividir por un número de un dígito. Naturalmente, los problemas de división se vuelven más difíciles a medida que el número por el que se divide aumenta. Afortunadamente, tengo algo de magia bajo la manga para hacerte la vida más fácil.

Comencemos primero con un problema relativamente sencillo:

$$597 \div 14$$

Dado que 597 se encuentra entre 14×10 y 14×100 , la respuesta (también llamada cociente) se encuentra entre 10 y 100. Para determinar la respuesta, el primer paso es preguntar cuántas veces cabe 14 en 590. Como $14 \times 40 = 560$, sabes que la respuesta es 40 y tantos, por lo que puedes decir "cuarenta" en voz alta.

Luego, resta 560 de 597, que es 37 y reduce tu problema a dividir 14 entre 37. Como $14 \times 2 = 28$, tu respuesta es 42. Restar 28 de 37 te deja un resto de 9. El proceso de derivar la solución a Este problema se puede ilustrar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 14 \overline{)597} \\
 \underline{-560} \\
 37 \\
 \underline{-28} \\
 9
 \end{array}$$

Answer: $42 \frac{9}{14}$

El siguiente problema es un poco más difícil porque el divisor de dos dígitos (aquí 23) es más grande.

$$682 \div 23$$

En este problema, la respuesta es un número de dos dígitos porque 682 se encuentra entre $23 \times 10 = 230$ y $23 \times 100 = 2300$. Para calcular las decenas de la respuesta de dos dígitos, debes preguntar cuántas veces sale 23. en 680. Si intentas 30, verás que es demasiado, ya que $30 \times 23 = 690$. Ahora sabes que la respuesta es 20 y tantos, y puedes decirlo. Luego resta $23 \times 20 = 460$ de 682 para obtener 222. Como $23 \times 9 = 207$, la respuesta es 29 con un resto de $222 - 207 = 15$.

$$\begin{array}{r}
 29 \\
 23 \overline{)682} \\
 \underline{-460} \\
 222 \\
 \underline{-207} \\
 15
 \end{array}$$

Answer: $29 \frac{15}{23}$

Ahora considere:

$$491 \div 62$$

Como 491 es menor que $62 \times 10 = 620$, tu respuesta será simplemente un número de un dígito con resto. Podrías adivinar 8, pero $62 \times 8 = 496$, que es un poco alto. Como $62 \times 7 = 434$, la respuesta es 7 con un resto de $491 - 434 = 57$, o

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 62 \overline{)491} \\
 \underline{-434} \\
 57
 \end{array}$$

Answer: $7 \frac{57}{62}$

En realidad, existe un truco ingenioso para facilitar problemas como este. ¿Recuerdas la primera vez que intentaste multiplicar 62×8 , pero descubriste que el resultado era un poco alto: 496? Bueno, ese no fue un esfuerzo en vano. Además de saber que la respuesta es 7, también puedes calcular el resto de inmediato. Como 496 es 5 más que 491, el resto será 5 menos que 62, el divisor. Como $62 - 5 = 57$, tu respuesta es 7. La razón por la que este truco funciona es porque $491 = (62 \times 8) - 5 = 62 \times (7 + 1) - 5 = (62 \times 7 + 62) - 5 = (62 \times 7) + (62 - 5) = 62 \times 7 + 57$.

Ahora prueba $380 \div 39$ usando el atajo que acabamos de aprender. Entonces $39 \times 10 = 390$, que es 10 demasiado alto. Por lo tanto, la respuesta es 9 con un resto de $39 - 10 = 29$.

Tu próximo desafío es dividir un número de dos dígitos en un número de cuatro dígitos:

$$3657 \div 54$$

Como $54 \times 100 = 5400$, sabes que tu respuesta será un número de dos dígitos. Para llegar al primer dígito de la respuesta, necesitas calcular cuántas veces cabe 54 en 3657. Como $54 \times 70 = 3780$ es un poco alto, sabes que la respuesta debe ser 60 y algo.

Luego, multiplica $54 \times 60 = 3240$ y resta $3657 - 3240 = 417$. Una vez que digas 60, tu problema se ha simplificado a $417 \div 54$. Como $54 \times 8 = 432$ es un poco demasiado alto, tu último dígito es 7 con el resto $54 - 15 = 39$.

$$\begin{array}{r} 67 \\ 54 \overline{)3657} \\ \underline{-3240} \\ 417 \\ \underline{-378} \\ 39 \end{array}$$

$$\text{Answer: } 67 \frac{39}{54}$$

Ahora intenta resolver un problema con una respuesta de tres dígitos:

$$\begin{array}{r}
 9467 \div 13 \\
 \hline
 728 \\
 13 \overline{)9467} \\
 \underline{-9100} \\
 367 \\
 \underline{-260} \\
 107 \\
 \underline{-104} \\
 3
 \end{array}$$

Answer: $728 \frac{3}{13}$

Simplificando problemas de división

Si a estas alturas sufres de tensión cerebral, relájate. Como prometí, quiero compartir contigo un par de trucos para simplificar ciertos problemas de división mental. Estos trucos se basan en el principio de dividir ambas partes del problema por un factor común.

Si ambos números del problema son pares, puedes hacer el problema dos veces más fácil dividiendo cada número entre 2 antes de comenzar. Por ejemplo, $858 \div 16$ tiene dos números pares, y al dividir cada uno entre 2 se obtiene el problema mucho más simple de $429 \div 8$:

$$\begin{array}{r}
 53 \\
 16 \overline{)858} \\
 \underline{-800} \\
 58 \\
 \underline{-48} \\
 10
 \end{array}$$

Answer: $53 \frac{10}{16}$

Divide by 2

$$\begin{array}{r}
 53 \\
 8 \overline{)429} \\
 \underline{-400} \\
 29 \\
 \underline{-24} \\
 5
 \end{array}$$

Answer: $53 \frac{5}{8}$

Como puedes ver, los restos 10 y 5 no son iguales; pero si escribes el resto en forma de fracción, obtienes que es lo mismo que $\frac{5}{8}$. Por lo tanto, al utilizar $\frac{10}{16}$ este método, siempre debes expresar la respuesta en forma fraccionaria.

Hemos realizado ambos conjuntos de cálculos para que veas cuánto más fácil es. Ahora prueba uno para practicar:

$$3618 \div 54$$

$$\begin{array}{r}
 67 \\
 54 \overline{)3618} \\
 \underline{-3240} \\
 378 \\
 \underline{-378} \\
 0
 \end{array}$$

Divide by 2

$$\begin{array}{r}
 67 \\
 27 \overline{)1809} \\
 \underline{-1620} \\
 189 \\
 \underline{-189} \\
 0
 \end{array}$$

Answer: 67

El problema de la derecha es mucho más fácil de calcular mentalmente. Si estás realmente alerta, puedes dividir ambos lados del problema original entre 18 para llegar a un problema aún más simple: $201 \div 3 = 67$.

Esté atento a los problemas que se pueden dividir dos veces por 2, como $1652 \div 36$:

$$1652 \div 36 = \underset{\div 2}{826 \div 18} = \underset{\div 2}{413 \div 9} = \begin{array}{r} 45 \\ 9 \overline{)413} \\ \underline{-360} \\ 53 \\ \underline{-45} \\ 8 \end{array}$$

$$\text{Answer: } 45\frac{8}{9}$$

Normalmente encuentro más fácil dividir el problema por 2 dos veces que dividir ambos números por 4. Luego, cuando ambos números terminen en 0, puedes dividir cada uno por 10:

$$580 \div 70 = \underset{\div 10}{58 \div 7} = \begin{array}{r} 8 \\ 7 \overline{)58} \\ \underline{-56} \\ 2 \end{array}$$

$$\text{Answer: } 8\frac{2}{7}$$

Pero si ambos números terminan en 5, duplícalos y luego divide ambos por 10 para simplificar el problema. Por ejemplo:

$$475 \div 35 = \underset{\times 2}{950 \div 70} = \underset{\div 10}{95 \div 7} = \begin{array}{r} 13 \\ 7 \overline{)95} \\ \underline{-70} \\ 25 \\ \underline{-21} \\ 4 \end{array}$$

$$\text{Answer: } 13\frac{4}{7}$$

Finalmente, si el divisor termina en 5 y el número que estás dividiendo termina en 0, multiplica ambos por 2 y luego divide por 10, tal como lo hiciste anteriormente:

$$890 \div 45 = \underset{\times 2}{1780 \div 90} = \underset{\div 10}{178 \div 9} = \begin{array}{r} 19 \\ 9 \overline{)178} \\ \underline{-90} \\ 88 \\ \underline{-81} \\ 7 \end{array}$$

$$\text{Answer: } 19\frac{7}{9}$$

EJERCICIO: DIVISIÓN DE DOS DÍGITOS

Aquí encontrará una variedad de problemas de división de dos dígitos que pondrán a prueba su destreza mental, utilizando las técnicas de simplificación explicadas anteriormente en este capítulo. Consulte el final del libro para obtener respuestas y explicaciones.

1. $738 \div 17$

2. $591 \div 24$

3. $321 \div 79$

4. $4268 \div 28$

5. $7214 \div 11$

6. $3074 \div 18$

COMBINAR INGENIO CON UNA CALCULADORA: APRENDIENDO DECIMALIZACIÓN

Como puedes imaginar, me gusta hacer algo de magia cuando convierto fracciones a decimales. En el caso de fracciones de un dígito, la mejor manera es memorizar las siguientes fracciones, desde mitades hasta undécimas. Esto no es tan difícil como parece. Como verás a continuación, la mayoría de las fracciones de un dígito tienen propiedades especiales que las hacen difíciles de olvidar. Cada vez que puedas reducir una fracción a una que ya conoces, acelerarás el proceso.

Probablemente ya conozcas el equivalente decimal de las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{2} = .50 \quad \frac{1}{3} = .333 \dots \quad \frac{2}{3} = .666 \dots$$

Asimismo:

$$\frac{1}{4} = .25 \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = .50 \quad \frac{3}{4} = .75$$

Las quintas son fáciles de recordar:

$$\frac{1}{5} = .20 \quad \frac{2}{5} = .40 \quad \frac{3}{5} = .60 \quad \frac{4}{5} = .80$$

Los sextos requieren memorizar sólo dos nuevas respuestas:

$$\frac{1}{6} = .1666 \dots \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = .333 \dots \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = .50$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = .666 \dots \quad \frac{5}{6} = .8333 \dots$$

Volveré a los séptimos en un momento. Los octavos son muy sencillos:

$$\frac{1}{8} = .125 \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = .25$$

/div>

$$\frac{3}{8} = .375 \quad (3 \times \frac{1}{8} = 3 \times .125 = .375)$$

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = .50$$

$$\frac{5}{8} = .625 \quad (5 \times \frac{1}{8} = 5 \times .125 = .625)$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = .75$$

$$\frac{7}{8} = .875 \quad (7 \times \frac{1}{8} = 7 \times .125 = .875)$$

Las novenas tienen su propia magia:

$$\frac{1}{9} = .\overline{1}$$

$$\frac{2}{9} = .\overline{2}$$

$$\frac{3}{9} = .\overline{3}$$

$$\frac{4}{9} = .\overline{4}$$

$$\frac{5}{9} = .\overline{5}$$

$$\frac{6}{9} = .\overline{6}$$

$$\frac{7}{9} = .\overline{7}$$

$$\frac{8}{9} = .\overline{8}$$

donde la barra indica que el decimal se repite. Por ejemplo, las décimas que ya conoces:

$$\frac{1}{10} = .10$$

$$\frac{2}{10} = .20$$

$$\frac{3}{10} = .30$$

$$\frac{4}{10} = .40$$

$$\frac{5}{10} = .50$$

$$\frac{6}{10} = .60$$

$$\frac{7}{10} = .70$$

$$\frac{8}{10} = .80$$

$$\frac{9}{10} = .90$$

Para los undécimos, si recuerdas que $\frac{1}{11} = .0909\overline{09}$, el resto es fácil:

$$\frac{1}{11} = .\overline{09} = .0909\ldots \quad \frac{2}{11} = .\overline{18} (2 \times .0909)$$

$$\frac{3}{11} = .\overline{27} (3 \times .0909) \quad \frac{4}{11} = .\overline{36} \quad \frac{5}{11} = .\overline{45}$$

$$\frac{6}{11} = .\overline{54}$$

$$\frac{7}{11} = .\overline{63}$$

$$\frac{8}{11} = .\overline{72}$$

$$\frac{9}{11} = .\overline{81}$$

$$\frac{10}{11} = .\overline{90}$$

Los séptimos son realmente notables. Una vez que memorices $\frac{1}{7}$ podrás obtener todos los demás séptimos sin tener que calcularlos:

$$\frac{1}{7} = .\overline{142857}$$

$$\frac{2}{7} = .\overline{285714}$$

$$\frac{3}{7} = .\overline{428571}$$

$$\frac{4}{7} = .\overline{571428}$$

$$\frac{5}{7} = .\overline{714285}$$

$$\frac{6}{7} = .\overline{857142}$$

Tenga en cuenta que el mismo patrón de números se repite en cada fracción. Sólo varía el punto de partida. Puedes descubrir el punto de partida en una ceniza multiplicando .14 por el numerador. En el caso de $\frac{2}{7}$, $\times .14 = .28$, entonces use la secuencia que comienza con el 2, es decir, .285714. Lo mismo ocurre $\frac{3}{7}$, ya que $3 \times .14 = .42$, use el con la secuencia que comienza con 4, es decir, .428571. El resto sigue en un manera similar.

Tendrás que calcular fracciones mayores que como lo harías cualquier otro problema de división. Sin embargo, mantén los ojos bien abiertos formas de simplificar tales problemas. Por ejemplo, puedes simplificar la fracción dividiendo ambos números entre 2, para reducirla a cuál es $\frac{9}{17}$, más fácil de calcular.

Si el denominador de la fracción es un número par, puedes simplifica la fracción reduciéndola a la mitad, incluso si el numerador es extraño. Por ejemplo:

$$\frac{9}{14} = \frac{4.5}{7}$$

Dividir el numerador y el denominador por la mitad lo reduce a un fracción de séptimos. Aunque la secuencia de séptimas mostrada anteriormente no proporciona el decimal una vez que comienzas el cálculo, Aparecerá el número que memorizaste:

$$\begin{array}{r}
 .6428571 \\
 7 \overline{)4.5000000} \\
 \underline{-4.2} \\
 3
 \end{array}$$

Como puede ver, no es necesario resolver todo el problema. Una vez que lo hayas reducido a dividir 3 entre 7, podrás causar una gran impresión en la audiencia al recitar esta larga serie de números casi al instante.

Cuando el divisor termina en 5, casi siempre vale la pena duplicar el problema, luego divídalo por 10. Por ejemplo,

$$\frac{29}{45} = \frac{58}{90} = \frac{5.8}{9} = .6\overline{44}$$

$\times 2$
 $\div 10$

Los números que terminan en 25 o 75 deben multiplicarse por 4 antes dividiendo por 100.

$$\frac{31}{25} = \frac{124}{100} = 1.24$$

$\times 4$
 $\div 100$

$$\frac{62}{75} = \frac{248}{300} = \frac{2.48}{3} = .82\overline{66}$$

$\times 4$
 $\div 100$

Incluso puedes utilizar este truco en medio de un problema. Si tu fracción es mira lo que pasa:

$$\begin{array}{r}
 .1 \\
 16 \overline{)3.000} \\
 \underline{-16} \\
 14
 \end{array}$$

Una vez que el problema se reduce $\frac{14}{16}$, puedes reducirlo aún más a $\frac{7}{8}$, a lo que sabes que es .875. Por lo tanto $\frac{3}{16} = .1875$.

EXERCISE: DECIMALIZATION

Para resolver los siguientes problemas, no olvides emplear las diversas fracciones de un dígito que ya conoces como decimales. Cuando sea apropiado, simplifica la fracción antes de convertirla a decimal.

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| 1. $\frac{2}{5}$ | 2. $\frac{4}{7}$ | 3. $\frac{3}{8}$ | 4. $\frac{9}{12}$ | 5. $\frac{5}{12}$ | 6. $\frac{6}{11}$ |
| 7. $\frac{14}{24}$ | 8. $\frac{13}{27}$ | 9. $\frac{18}{48}$ | 10. $\frac{10}{14}$ | 11. $\frac{6}{32}$ | 12. $\frac{19}{45}$ |

PRUEBAS DE DIVISIBILIDAD

En la última sección vimos cómo se podían simplificar los problemas de división cuando ambos números eran divisibles por un factor común. Terminamos este capítulo con una breve discusión sobre cómo determinar si un número es factor de otro número. Ser capaz de encontrar los factores de un número nos ayuda a simplificar los problemas de división y puede acelerar muchos problemas de multiplicación. Esta también será una herramienta muy útil cuando llegemos a la multiplicación avanzada, ya que a menudo buscarás formas de factorizar un número de dos, tres o incluso cinco dígitos en medio de un problema de multiplicación. Poder factorizar estos números rápidamente es muy útil. Y además, creo que algunas de las reglas son simplemente hermosas.

Es fácil comprobar si un número es divisible por 2. Todo lo que necesitas hacer es comprobar si el último dígito es par. Si el último dígito es 2, 4, 6, 8 o 0, el número completo es divisible por 2.

Para probar si un número es divisible por 4, verifica si el número de dos dígitos al final es divisible por 4. El número 57,852 es múltiplo de 4 porque $52 = 13 \times 4$. El número 69,346 no es múltiplo de 4 porque 46 no es múltiplo de 4. La razón por la que esto funciona es porque 4 se divide uniformemente entre 100 y, por lo tanto, entre cualquier

múltiplo de 100. Por lo tanto, dado que 4 se divide de manera uniforme entre 57,800 y 4 se divide en 52, sabemos que 4 se divide de manera uniforme en su suma, 57,852.

Del mismo modo, dado que 8 se divide entre 1000, para probar la divisibilidad entre 8, verifica los últimos tres dígitos del número. Para el número 14,918, divide 8 entre 918. Como esto te deja con un resto ($918 \div 8 = 114$), el número no es divisible por 8. También podrías haber observado esto al notar que 18 (los dos últimos dígitos de 14,918) no es divisible por 4, y como 14,918 no es divisible por 4, tampoco puede ser divisible por 8.

Cuando se trata de divisibilidad por 3, he aquí una regla interesante que es fácil de recordar: un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3, sin importar cuántos dígitos tenga el número. Para comprobar si 57,852 es divisible por 3, simplemente suma $5 + 7 + 8 + 5 + 2 = 27$. Dado que 27 es múltiplo de 3, sabemos que 57,852 es múltiplo de 3. La misma sorprendente regla se aplica a la divisibilidad por 9. Un número es divisible por 9 si y sólo si sus dígitos suman un múltiplo de 9. Por lo tanto, 57,852 es un múltiplo de 9, mientras que 31,416, que suma 15, no lo es. La razón por la que esto funciona se basa en el hecho de que los números 1, 10, 100, 1000, 10000, etc., son todos 1 mayor que un múltiplo de 9.

Un número es divisible por 6 si y sólo si es par y divisible por 3, por lo que es fácil probar la divisibilidad entre 6.

Determinar si un número es divisible por 5 es aún más fácil. Cualquier número, por grande que sea, es múltiplo de 5 si y sólo si termina en 5 o 0.

Establecer la divisibilidad entre 11 es casi tan fácil como determinar la divisibilidad entre 3 o 9. Un número es divisible entre 11 si y sólo si llegas a 0 o a un múltiplo de 11 cuando alternativamente restas y sumas los dígitos de un número. Por ejemplo, 73.958 no es divisible por 11 ya que $7 - 3 + 9 - 5 + 8 = 16$. Sin embargo, los números 8.492 y 73.194 son múltiplos de 11, ya que $8 - 4 + 9 - 2 = 11$ y $7 - 3 + 1 - 9 + 4 = 0$. La razón por la que esto funciona se basa, como la regla para los 3 y 9, en el hecho de que los números 1, 100, 10 000 y

1.000.000 es 1 más que un múltiplo de 11, mientras que los números 10, 1.000, 100.000, etc., son 1 menos que un múltiplo de 11.

La prueba de divisibilidad entre 7 es un poco más complicada. Si sumas o restas un número que es múltiplo de 7 al número que estás probando y el número resultante es múltiplo de 7, entonces la prueba es positiva. Siempre elijo sumar o restar un múltiplo de 7 para que la suma o diferencia resultante termine en 0. Por ejemplo, para probar el número 5292, resto 42 (un múltiplo de 7) para obtener 5250. Luego, me deshago de el 0 al final (ya que dividir entre diez no afecta la divisibilidad entre siete), dejándome con 525. Luego repito el proceso sumando 35 (un múltiplo de 7), lo que me da 560. Cuando borro el 0, Me queda 56, que sé que es múltiplo de 7.

Por tanto, el número original 5292 es divisible por 7.

Este método funciona no solo para 7, sino también para cualquier número impar que no termine en 5. Por ejemplo, para probar si 8792 es divisible por 13, resta $4 \times 13 = 52$ de 8792, para llegar a 8740. Quitar el 0 da como resultado 874. Luego suma $2 \times 13 = 26$ para llegar a 900. Quitar los dos ceros te deja con 9, que claramente no es un múltiplo de 13. Por lo tanto, 8792 no es un múltiplo de 13.

EXERCISE: TESTING FOR DIVISIBILITY

En esta serie final de ejercicios, tenga especial cuidado cuando pruebe la divisibilidad entre 7 y 17. El resto debería resultarle fácil.

Divisibility by 2

1. **53,428** 2. **293** 3. **7241** 4. **9846**

Divisibility by 4

5. **3932** 6. **67,348** 7. **358** 8. **57,929**

Divisibility by 8

9. **59,366** 10. **73,488** 11. **248** 12. **6111**

Divisibility by 3

13. **83,671** 14. **94,737** 15. **7359** 16. **3,267,486**

Divisibility by 6

17. **5334** 18. **67,386** 19. **248** 20. **5991**

Divisibility by 9

21. **1234** 22. **8469** 23. **4,425,575** 24. **314,159,265**

Divisibility by 5

25. **47,830** 26. **43,762** 27. **56,785** 28. **37,210**

Divisibility by 11

29. **53,867** 30. **4969** 31. **3828** 32. **941,369**

Divisibility by 7

33. **5784** 34. **7336** 35. **875** 36. **1183**

Divisibility by 17

37. **694** 38. **629** 39. **8273** 40. **13,855**

FRACCIONES

Si puedes manipular números enteros, entonces hacer aritmética con fracciones es casi igual de fácil. En esta sección, repasamos los métodos básicos para sumar, restar, multiplicar, dividir y simplificar fracciones. Aquellos que ya estén familiarizados con las fracciones pueden saltarse esta sección sin pérdida de continuidad.

multiplicar fracciones

Para multiplicar dos fracciones, simplemente multiplica los números superiores (llamados numeradores) y luego multiplica los números inferiores (llamados denominadores). Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

¡Qué podría ser más sencillo! Pruebe estos ejercicios antes de continuar.

EXERCISE: MULTIPLYING FRACTIONS

$$1. \quad \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} \qquad 2. \quad \frac{4}{9} \times \frac{11}{7} \qquad 3. \quad \frac{6}{7} \times \frac{3}{4} \qquad 4. \quad \frac{9}{10} \times \frac{7}{8}$$

Dividir fracciones

Dividir fracciones es tan fácil como multiplicar fracciones. Sólo hay un paso extra. Primero, invierte la segunda fracción (esto se llama recíproco) y luego multiplica. Por ejemplo, el recíproco de $\frac{5}{4}$ es $\frac{4}{5}$. Por lo tanto,

$$\frac{5}{4}$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{5}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{5} = \frac{9}{10}$$

EXERCISE: DIVIDING FRACTIONS

Ahora es tu turno. Divide estas fracciones.

$$1. \quad \frac{2}{5} \div \frac{1}{2} \qquad 2. \quad \frac{1}{3} \div \frac{6}{5} \qquad 3. \quad \frac{2}{5} \div \frac{3}{5}$$

Simplificar fracciones

Las fracciones pueden considerarse como pequeños problemas de división. Por ejemplo, $\frac{6}{3}$ es lo mismo que $6 \div 3 = 2$. La fracción es lo mismo que $1 \div 4$

(que es .25 en forma decimal). Ahora sabemos que cuando

Multiplica cualquier número por 1 y el número sigue siendo el mismo. Por ejemplo, $\frac{3}{5} = \times \frac{3}{5} 1$. Pero si reemplazamos 1 con $\frac{2}{2}$, obtenemos $\frac{3}{5} = \times \frac{3}{5} 1 = \times \frac{3}{5} \frac{2}{2}$

$= \frac{6}{10}$ Por lo tanto $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. Asimismo, si reemplazamos 1 con $\frac{3}{3}$, obtenemos $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{15}$.

En otras palabras, si multiplicamos el numerador y denominador por el mismo número, obtenemos una fracción que es igual a la primera fracción.

Para otro ejemplo,

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{15}$$

También es cierto que si dividimos el numerador y el denominador entre el mismo número, entonces obtenemos una fracción que es igual a la primera uno.

Por ejemplo,

$$\frac{4}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{2}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{25}{35} = \frac{25}{35} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{7}$$

A esto se le llama simplificar la fracción.

EXERCISE: SIMPLIFYING FRACTIONS

Para las siguientes fracciones, ¿puedes encontrar una fracción igual cuyo denominador sea 12?

1. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{5}{6}$

3. $\frac{3}{4}$

4. $\frac{5}{2}$

Simplifica estas fracciones.

5. $\frac{8}{10}$

6. $\frac{6}{15}$

7. $\frac{24}{36}$

8. $\frac{20}{36}$

Sumar fracciones

El caso fácil es el de denominadores iguales. Si los denominadores son iguales, entonces sumamos los numeradores y mantenemos los mismos denominadores.

Por ejemplo,

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

A veces podemos simplificar nuestra respuesta. Por ejemplo,

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

EXERCISE: ADDING FRACTIONS (EQUAL DENOMINATORS)

1. $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$

2. $\frac{5}{12} + \frac{4}{12}$

3. $\frac{5}{18} + \frac{6}{18}$

4. $\frac{3}{10} + \frac{3}{10}$

El caso más complicado: denominadores desiguales. Cuando los denominadores no son iguales, reemplazamos nuestras fracciones con fracciones donde los denominadores son iguales.

Por ejemplo, para agregar

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{15}$$

nos damos cuenta que

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$

para agregar

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8}$$

nos damos cuenta que

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

Entonces,

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{7}{8} = \frac{11}{8}$$

para agregar

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

vemos eso

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} \text{ and } \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

Entonces,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

EXERCISE: ADDING FRACTIONS (UNEQUAL DENOMINATORS)

1. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ 2. $\frac{1}{6} + \frac{5}{18}$ 3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ 4. $\frac{2}{7} + \frac{5}{21}$
5. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 6. $\frac{3}{7} + \frac{3}{5}$ 7. $\frac{2}{11} + \frac{5}{9}$

Restar fracciones

Restar fracciones funciona de manera muy similar a sumarlas. Lo hemos ilustrado con ejemplos y le proporcionamos ejercicios para que los haga.

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \quad \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = \frac{4}{8} - \frac{7}{8} = \frac{-3}{8} \quad \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8}{28} - \frac{7}{28} = \frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{16}{24} - \frac{15}{24} = \frac{1}{24}$$

EXERCISE: SUBTRACTING FRACTIONS

1. $\frac{8}{11} - \frac{3}{11}$

2. $\frac{12}{7} - \frac{8}{7}$

3. $\frac{13}{18} - \frac{5}{18}$

4. $\frac{4}{5} - \frac{1}{15}$

5. $\frac{9}{10} - \frac{3}{5}$

6. $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$

7. $\frac{7}{8} - \frac{1}{16}$

8. $\frac{4}{7} - \frac{2}{5}$

9. $\frac{8}{9} - \frac{1}{2}$

Capítulo 5

Suficientemente bueno: el arte de la “estimación”

Hasta ahora has estado perfeccionando las técnicas mentales necesarias para descubrir las respuestas exactas a los problemas matemáticos. Sin embargo, a menudo lo único que necesitará es una estimación aproximada. Supongamos que recibe cotizaciones de diferentes prestamistas sobre cómo refinanciar su casa. Todo lo que realmente necesita en esta etapa de recopilación de información es una estimación aproximada de cuáles serán sus pagos mensuales. O digamos que estás pagando la cuenta de un restaurante con un grupo de amigos y no quieres calcular la cuenta de cada persona al detalle. Los métodos de estimación descritos en este capítulo harán que ambas tareas (y muchas más similares) sean mucho más fáciles. La suma, la resta, la división y la multiplicación se prestan a la estimación. Como de costumbre, harás tus cálculos de izquierda a derecha.

ADICIÓN DE CONDICIONES

La estimación es una buena manera de hacerle la vida más fácil cuando los números de un problema son demasiado largos para recordarlos. El truco consiste en redondear los números originales hacia arriba o hacia abajo:

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 8,367 \\ + 5,819 \\ \hline 14,186 \end{array} & \approx & \begin{array}{r} 8,000 \\ + 6,000 \\ \hline 14,000 \end{array} \\
 & & (\approx \text{ means approximately})
 \end{array}$$

Postor de George Parker: el ingeniero calculador

t Los británicos han tenido su cuota de calculadoras relámpago, y las actuaciones mentales de George Parker Bidder (1806-1878), nacido en Devonshire, fueron tan impresionantes como cualquier otra. Como la mayoría de las calculadoras relámpago, Bidder comenzó a probar suerte (y mente) con la aritmética mental cuando era joven. Bidder aprendió a contar, sumar, restar, multiplicar y dividir jugando con canicas y se fue de gira con su padre a los nueve años.

Casi ninguna pregunta le resultaba demasiado difícil de manejar. "Si la Luna está a 123.256 millas de la Tierra y el sonido viaja cuatro millas por minuto, ¿cuánto tiempo tardaría el sonido en viajar de la Tierra a la Luna?" El joven postor, con el rostro arrugado mientras pensaba durante casi un minuto, respondió: "Veintiún días, nueve horas, treinta y cuatro minutos". (Ahora sabemos que la distancia es más cercana a 240.000 millas y que el sonido no puede viajar a través del vacío del espacio.) A los diez años, Bidder calculó mentalmente la raíz cuadrada de 119.550.669.121 como 345.761 en apenas treinta segundos. En 1818, Bidder y la calculadora relámpago estadounidense Zerah Colburn se enfrentaron en un duelo de cálculo mental en el que Bidder, aparentemente, "superaba en número". Colburn.

Aprovechando su fama, George Bidder ingresó en la Universidad de Edimburgo y se convirtió en uno de los ingenieros más respetados de Inglaterra. En los debates parlamentarios sobre conflictos ferroviarios, Bidder era citado frecuentemente como testigo, lo que hacía estremecer a la oposición; como dijo alguien: "La naturaleza le había dotado de cualidades particulares que no colocaban su

oponentes en pie de igualdad". A diferencia de Colburn, que se retiró como calculador de relámpagos a los veinte años, Bidder mantuvo esa profesión durante toda su vida. De hecho, todavía en 1878, justo antes de su muerte, Bidder calculó el número de vibraciones de la luz que llegan al ojo en un segundo, basándose en el hecho de que hay 36.918 ondas de luz roja por pulgada y que la luz viaja a aproximadamente 190.000 millas. por segundo.

Observa que redondeamos el primer número hacia abajo al millar más cercano y el segundo hacia arriba. Como la respuesta exacta es 14.186, nuestro error relativo es pequeño.

Si quieres ser más exacto, en lugar de redondear o al millar más cercano, redondea o a la centena más cercana:

$$\begin{array}{r} 8,367 \\ + 5,819 \\ \hline 14,186 \end{array} \approx \begin{array}{r} 8,400 \\ + 5,800 \\ \hline 14,200 \end{array}$$

La respuesta está a sólo 14 o de la respuesta exacta, un error de menos más del 0,1%. ¡Esto es lo que yo llamo una buena estimación!

Pruebe con un problema de suma de cinco dígitos, redondeando a la centena más cercana:

$$\begin{array}{r} 46,187 \\ + 19,378 \\ \hline 65,565 \end{array} \approx \begin{array}{r} 46,200 \\ + 19,400 \\ \hline 65,600 \end{array}$$

Al redondear a la centena más cercana, nuestra respuesta siempre será inferior a 100. Si la respuesta es mayor que 10 000, su estimación estará dentro del 1% de la respuesta exacta.

Ahora probemos algo salvaje:

$$\begin{array}{rcl}
 23,859,379 & & 24,000,000 & & 23.9 \text{ million} \\
 + 7,426,087 & \approx & + 7,000,000 & \text{or} & + 7.4 \text{ million} \\
 \hline
 31,285,466 & & 31,000,000 & & 31.3 \text{ million}
 \end{array}$$

Si redondeas al millón más cercano, obtienes una respuesta de 31 millones, o sea aproximadamente 285.000. No está mal, pero puedes hacerlo mejor redondeando a la centena de millar más cercana, como mostramos en la columna de la derecha. Nuevamente su estimación estará dentro del 1% de la respuesta precisa. Si puedes calcular estos problemas más pequeños exactamente, puedes estimar la respuesta a cualquier problema de suma.

Adivinar en el supermercado

Probemos con un ejemplo del mundo real. ¿Alguna vez has ido a la tienda y te has preguntado cuál será el total antes de que el cajero lo marque? Para estimar el total, mi técnica es redondear los precios al 50¢ más cercano. Por ejemplo, mientras el cajero suma los números que se muestran a continuación a la izquierda, yo sumo mentalmente los números que se muestran a la derecha:

\$ 1.39	\$ 1.50
0.87	1.00
2.46	2.50
0.61	0.50
3.29	3.50
2.99	3.00
0.20	0.00
1.17	1.00
0.65	0.50
2.93	3.00
<u>3.19</u>	<u>3.00</u>
\$19.75	\$19.50

Mi cifra final suele estar a un dólar del total exacto.

INVESTIGACIÓN DE RESTA

La forma de estimar las respuestas a los problemas de resta es la misma: se redondea al dígito de mil o centenas más cercano, preferiblemente al último:

$$\begin{array}{r} 8,367 \\ - 5,819 \\ \hline 2,548 \end{array} \approx \begin{array}{r} 8,000 \\ - 6,000 \\ \hline 2,000 \end{array} \text{ or } \begin{array}{r} 8,400 \\ - 5,800 \\ \hline 2,600 \end{array}$$

Puedes ver que redondear al millar más cercano te deja con una respuesta bastante equivocada. Al redondear al segundo dígito (cientos, en el ejemplo), su respuesta generalmente estará dentro del 3% de la respuesta exacta. Para este problema, su respuesta es solo 52, un error relativo del 2%. Si redondea al tercer dígito, el error relativo normalmente será inferior al 1%. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 439,412 \\ - 24,926 \\ \hline 414,486 \end{array} \approx \begin{array}{r} 440,000 \\ - 20,000 \\ \hline 420,000 \end{array} \text{ or } \begin{array}{r} 439,000 \\ - 25,000 \\ \hline 414,000 \end{array}$$

Al redondear los números al tercer dígito en lugar del segundo dígito, se mejora la precisión de la estimación en una cantidad significativa.

INVESTIGACIÓN DE LA DIVISIÓN

El primer paso, y el más importante, para estimar la respuesta a un problema de división es determinar la magnitud de la respuesta:

$$\begin{array}{r} 9,644.5 \\ 6 \overline{)57,867.0} \end{array} \approx \begin{array}{r} 9 \\ 6 \overline{)58,000} \\ \underline{54} \\ 4 \end{array}$$

$\text{Answer} \approx 9\frac{2}{3} \text{ thousand} = 9,667$

El siguiente paso es redondear los números mayores al millar más cercano y cambiar 57,867 por 58,000. Al dividir 6 entre 58, obtienes 9 con resto. Pero el componente más importante en este problema es dónde colocar el 9.

Por ejemplo, multiplicar 6×90 produce 540, mientras que multiplicar 6×900 produce 5400, los cuales son demasiado pequeños. Pero $6 \times 9\,000 = 54\,000$, lo cual se acerca bastante a la respuesta. Esto te dice que la respuesta es 9.000 y algo así. Puedes estimar qué es ese algo restando primero $58 - 54 = 4$. En este punto, puedes reducir el 0 y dividir 6 entre 40, y así sucesivamente. Pero si estás alerta, te darás cuenta de que dividir 6 entre 4 te da .667. Como sabes que la respuesta es 9.000 y tantos, ahora $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx$ estás en condiciones de adivinar 9.667. De hecho, la respuesta real es 9.645, ¡muy cerca!

La división en este nivel es simple. Pero ¿qué pasa con los problemas de grandes divisiones? Digamos que queremos calcular, sólo por diversión, la cantidad de dinero que gana un atleta profesional al día si gana \$5.000.000 al año:

$$365 \text{ days } \overline{) \$5,000,000}$$

Primero debes determinar la magnitud de la respuesta. ¿Este jugador gana miles todos los días? Bueno, $365 \times 1000 = 365\,000$, que es demasiado bajo.

¿Gana decenas de miles todos los días? Bueno, $365 \times 10\,000 = 3\,650\,000$, y eso es más bien. Para estimar tu respuesta, divide los dos primeros dígitos (o 36 entre 50) y calcula que. Dado que 18 cabe en 70 $1\frac{14}{36}$ o $1\frac{7}{18}$ aproximadamente 4 veces, tu conjetura es que el atleta gana alrededor de \$14 000. La respuesta exacta es \$13.698,63 por día. No es una mala estimación (¡y tampoco un mal salario!).

Aquí tienes un cálculo astronómico. ¿Cuántos segundos tarda la luz en llegar del sol a la tierra? Bueno, la luz viaja a 186,282 millas por segundo y el sol está (en promedio) a 92,960,130 millas de distancia. Dudo que estés particularmente ansioso por intentar esto.

problema a mano. Afortunadamente, es relativamente sencillo estimar una respuesta. Primero, simplifique el problema:

$$186,282 \overline{) 92,960,130} \approx 186 \overline{) 93,000}$$

Ahora divide 186 entre 930, lo que da 5 sin resto. Luego agrega los dos ceros que eliminaste de 93.000 y obtendrás 500 segundos. La respuesta exacta es 499,02 segundos, por lo que se trata de una estimación muy respetable.

Adivinación de multiplicación

Puedes utilizar prácticamente las mismas técnicas para estimar tus respuestas a los problemas de multiplicación. Por ejemplo,

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 54 \\ \hline 4752 \end{array} \approx \begin{array}{r} 90 \\ \times 50 \\ \hline 4500 \end{array}$$

Redondear al múltiplo de 10 más cercano simplifica considerablemente el problema, pero aún así el resultado es 252, o alrededor del 5%. Puedes hacerlo mejor si redondeas ambos números en la misma cantidad, pero en direcciones opuestas. Es decir, si redondeas 88 aumentando en 2, también debes disminuir 54 en 2:

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 54 \\ \hline 4752 \end{array} \approx \begin{array}{r} 90 \\ \times 52 \\ \hline 4680 \end{array}$$

En lugar de un problema de multiplicación de 1 por 1, ahora tienes un problema de 2 por 1, que debería serte bastante fácil de resolver. Su estimación es sólo del 1,5%.

Cuando estimas la respuesta a problemas de multiplicación redondeando el número mayor hacia arriba y el número menor hacia abajo, tu estimación será un poco baja. Si redondeas el número mayor hacia abajo y el número menor hacia arriba para que los números estén más cerca

juntos, su estimación será un poco alta. Cuanto mayor sea la cantidad que redondees hacia arriba o hacia abajo, mayor será tu estimación de la respuesta exacta. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 65 \\ \hline 4745 \end{array} \approx \begin{array}{r} 70 \\ \times 68 \\ \hline 4760 \end{array}$$

Dado que los números están más juntos después de redondearlos, tu estimación es un poco alta.

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 67 \\ \hline 4489 \end{array} \approx \begin{array}{r} 70 \\ \times 64 \\ \hline 4480 \end{array}$$

Dado que las cifras están más alejadas, la respuesta estimada es demasiado baja, aunque tampoco por mucho. Puedes ver que este método de estimación de multiplicaciones funciona bastante bien. Observe también que este problema es sólo 672 y que nuestra aproximación es sólo el primer paso de las técnicas de elevación al cuadrado. Veamos un ejemplo más:

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 52 \\ \hline 4316 \end{array} \approx \begin{array}{r} 85 \\ \times 50 \\ \hline 4250 \end{array}$$

Observamos que la aproximación es más precisa cuando los números originales están muy juntos. Intente estimar un problema de multiplicación de 3 por 2:

$$\begin{array}{r} 728 \\ \times 63 \\ \hline 45,864 \end{array} \approx \begin{array}{r} 731 \\ \times 60 \\ \hline 43,860 \end{array}$$

Al redondear 63 a 60 y 728 a 731, creas un problema de multiplicación de 3 por 1, lo que sitúa tu estimación dentro de 2004.

de la respuesta exacta, un error del 4,3%.

Ahora intenta estimar el siguiente problema de 3 por 3:

$$\begin{array}{r} 367 \\ \times 492 \\ \hline 180,564 \end{array} \approx \begin{array}{r} 359 \\ \times 500 \\ \hline 179,500 \end{array}$$

Notarás que aunque redondeaste ambos números hacia arriba y hacia abajo en 8, tu estimación aproximada es o en más de 1000. Esto se debe a que el problema de multiplicación es mayor y el tamaño del número redondeado es mayor, por lo que la estimación resultante será o en mayor cantidad. Pero el error relativo sigue siendo inferior al 1%.

¿Hasta dónde puedes llegar con este sistema de estimación de problemas de multiplicación? Tan alto como quieras. Sólo necesitas saber los nombres de los números grandes. Mil mil son un millón y mil millones son mil millones. Conociendo estos nombres y números, pruébate este para ver el tamaño:

$$\begin{array}{r} 28,657,493 \\ \times 13,864 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{r} 29 \text{ million} \\ \times 14 \text{ thousand} \\ \hline \end{array}$$

Como antes, el objetivo es redondear los números a números más simples como 29.000.000 y 14.000. Eliminando los ceros por ahora, esto es solo un problema de multiplicación de 2 por 2: $29 \times 14 = 406$ ($29 \times 14 = 29 \times 7 \times 2 = 203 \times 2 = 406$). Por tanto, la respuesta es aproximadamente 406 mil millones, ya que mil millones son mil millones.

ESTIMACIÓN DE RAÍCES CUADRADA: DIVISIÓN Y PROMEDIO

La cantidad, la raíz cuadrada de un número n , es el número que, multiplicado por sí mismo, dará n . Por ejemplo, la raíz cuadrada de 9 es 3 porque $3 \times 3 = 9$. La raíz cuadrada se usa en muchas ciencias y problemas de ingeniería y casi siempre se resuelve con una calculadora. El siguiente método proporciona una estimación precisa de la respuesta.

En la estimación de raíz cuadrada, su objetivo es obtener un número que, cuando se multiplica por sí mismo, se aproxima al número original.

Dado que la raíz cuadrada de la mayoría de los números no es un número entero, es probable que su estimación contenga una fracción o un punto decimal.

Comencemos estimando la raíz cuadrada de 19. El primer paso es pensar en el número que, cuando se multiplica por sí mismo, se aproxima más a 19. Bueno, $4 \times 4 = 16$ y $5 \times 5 = 25$. Como 25 es demasiado alto, la respuesta debe ser 4 puntos algo. Tu siguiente paso es dividir 4 entre 19, lo que te dará 4,75. Ahora, como 4×4 es menor que $4 \times 4,75 = 19$, que a su vez es menor que $4,75 \times 4,75$, sabemos que 19 (o $4 \times 4,75$) se encuentra entre 16 y 20,0625. Por tanto, la raíz cuadrada de 19 se encuentra entre 4 y 4,75.

Supongo que la raíz cuadrada de 19 está aproximadamente a medio camino, en 4,375. De hecho, la raíz cuadrada de 19 (redondeada a tres decimales) es 4,359, por lo que nuestra estimación es bastante cercana. Ilustramos este procedimiento de la siguiente manera:

Divide:

$$\begin{array}{r}
 4.75 \\
 4 \overline{)19.0} \\
 \underline{16} \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 \underline{20} \\
 0
 \end{array}$$

Average:

$$\frac{4 + 4.75}{2} = 4.375$$

En realidad, podemos obtener esta respuesta de otra manera, que quizás le resulte más sencilla. Sabemos que 4 al cuadrado es 16, que es menos de 19 por 3.

Para mejorar nuestra suposición, "sumamos el error dividido por el doble de nuestra suposición". Aquí sumamos 3 dividido por 8 para obtener $4 + \frac{3}{8} = 4.375$. Observamos que este método siempre producirá una respuesta un poco más alta que la respuesta exacta.

Ahora intenta uno un poco más difícil. ¿Cuál es la raíz cuadrada de 87?

Divide:

$$\begin{array}{r} 9.66 \\ 9 \overline{)87.0} \end{array}$$

Average:

$$\frac{9 + 9.66}{2} = 9.\overline{33}$$

Primero, elabora tu cifra aproximada, que puedes obtener con bastante rapidez si observas que $9 \times 9 = 81$ y $10 \times 10 = 100$, lo que significa que la respuesta es 9 puntos y pico. Realizando la división de 9 entre 87 con dos decimales se obtiene 9,66. Para mejorar tu estimación, toma el promedio de 9 y 9,66, que es 9,33: ¡exactamente la raíz cuadrada de 87 redondeada al segundo decimal!

Alternativamente, nuestra estimación aproximada es $9 + \frac{9 + \frac{6}{18}}{2} = 9.\overline{33}$.

(error)/18 = Usando esta técnica, es bastante fácil estimar la raíz cuadrada de números de dos dígitos. Pero ¿qué pasa con los números de tres dígitos? En realidad, no son mucho más difíciles. Puedo decirle desde el principio que todos los números de tres y cuatro dígitos tienen raíces cuadradas de dos dígitos antes del punto decimal. Y el procedimiento para calcular raíces cuadradas es el mismo, sin importar cuán grande sea el número. Por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de 679, primero encuentre su cifra aproximada.

Como 20 al cuadrado es 400 y 30 al cuadrado es 900, la raíz cuadrada de 679 debe estar entre 20 y 30.

Cuando divides 20 entre 679, obtienes aproximadamente 34.

Un promedio de 20 y 34 le da una estimación aproximada de 27, pero aquí hay una estimación mejor. Si sabes que 25 al cuadrado es 625, entonces tu error es $679 - 625 = 54$. Dividiendo eso por 50, tenemos $= \frac{54}{50} = 1.08$.

Por tanto, nuestra estimación mejorada es $25 + 1.08 = 26.08$. (Para obtener una estimación aún mejor, si sabes que 26 al cuadrado es 676, tu error es 3, así que suma $\frac{3}{26} \approx 0.115$ para obtener 26,06). La respuesta exacta es 26,06, redondeada a dos decimales.

Para estimar la raíz cuadrada de números de cuatro dígitos, mira los dos primeros dígitos del número para determinar el primer dígito de la raíz cuadrada. Por ejemplo, para encontrar la raíz cuadrada de 7369, considere la raíz cuadrada de 73. Como $8 \times 8 = 64$ y $9 \times 9 = 81$, 8 debe ser el primer dígito de la raíz cuadrada. Entonces la respuesta es 80 y tantos.

Ahora proceda de la forma habitual. Al dividir 80 entre 7369, se obtiene 92 más una fracción, por lo que una buena estimación es 86. Si elevas al cuadrado 86 para obtener 7396, obtendrás 27 más, por lo que debes restar $0,16 = \frac{17}{100}$ para obtener una mejor estimación de 85,84, que está justo en el dinero.

Calcular la raíz cuadrada de un número de seis dígitos como 593,472 parecería una tarea imposible para los no iniciados, pero para ti no es ningún problema. Como $700^2 = 490\,000$ y $800^2 = 640\,000$, el cuadrado de 593 472 debe estar entre 700 y 800. De hecho, todos los números de cinco y seis dígitos tienen raíces cuadradas de tres dígitos. En la práctica, sólo necesitas mirar la raíz cuadrada de los dos primeros dígitos de números de seis dígitos (o el primer dígito de cinco números). Una vez que sepas que la raíz cuadrada de 59 se encuentra entre 7 y 8, sabrás que tu respuesta está en 700.

Ahora proceda de la forma habitual:

Divide:

$$\begin{array}{r} 847 \quad 847 \\ 700 \overline{)593472} \approx 7 \overline{)5934} \end{array}$$

Average:

$$\frac{700 + 847}{2} = 773.5$$

La raíz cuadrada exacta de 593.472 es 770,37 (cinco lugares), por lo que estás bastante cerca. Pero podrías haber estado más cerca, como lo demuestra el siguiente truco. Tenga en cuenta que los dos primeros dígitos, 59, están más cerca de 64 (8×8) que de 49 (7×7). Debido a esto, puedes comenzar tu estimación con el número 8 y continuar desde allí:

Divide:

$$\begin{array}{r} 741 \quad 741 \\ 800 \overline{)593472} \approx 8 \overline{)5934} \end{array}$$

Average:

$$\frac{800 + 741}{2} = 770.5$$

Sólo por diversión, hagamos algo realmente increíble: la raíz cuadrada de 28.674.529. Esto no es tan difícil como podría parecer. El primer paso es redondear al número grande más cercano; en este caso, simplemente encuentra la raíz cuadrada de 29.

Divide:

$$\begin{array}{r} 5.8 \\ 5 \overline{)29.0} \\ \underline{25} \\ 40 \end{array}$$

Average:

$$\frac{5 + 5.8}{2} = 5.4$$

Todos los números de siete y ocho dígitos tienen raíces cuadradas de cuatro dígitos, por lo que 5,4 se convierte en 5400, tu estimación. La respuesta exacta es ligeramente mayor que 5354,8. ¡Nada mal!

Esto concluye el capítulo sobre matemáticas de estimación. Después de realizar los ejercicios siguientes, pase al siguiente capítulo sobre matemáticas con lápiz y papel, donde aprenderá a escribir las respuestas a los problemas, pero de una manera mucho más rápida que antes en papel.

El duelo matemático de Évariste Galois

La trágica historia del matemático francés Évariste Galois (1811-1832), asesinado a la edad de veinte años en un duelo por “una infame coqueta”, es legendaria en los anales de la historia de las matemáticas.

Galois, un estudiante precozmente brillante, sentó las bases de una rama de las matemáticas conocida como teoría de grupos.

Cuenta la leyenda que escribió su teoría la noche anterior al duelo, anticipando su fallecimiento y queriendo dejar su legado a la comunidad matemática. Horas antes de su muerte, el 30 de mayo de 1832, Galois escribió a Auguste Chevalier: “He hecho algunos nuevos descubrimientos en el análisis. El primero se refiere a la

teoría de ecuaciones, las demás funciones integrales”.

Después de describirlos, le pidió a su amigo: “Pide públicamente a Jacobi o a Gauss que den sus opiniones no sobre la verdad sino sobre la importancia de estos teoremas. Después de eso, espero que a algunos hombres les resulte rentable solucionar este lío.

Sin embargo, la leyenda romántica y la verdad histórica no siempre coinciden. Lo que Galois escribió la noche antes de su muerte fueron correcciones y cambios editoriales a artículos que habían sido aceptados por la Academia de Ciencias mucho antes. Además, los documentos iniciales de Galois habían sido presentados tres años antes del duelo, ¡cuando tenía diecisiete años! Fue después de esto que Galois se vio envuelto en una controversia política, fue arrestado, pasó un tiempo en un calabozo y, finalmente, se vio involucrado en una disputa sobre una mujer y fue asesinado.

Consciente de su propia precocidad, Galois señaló: "He llevado a cabo investigaciones que detendrán a muchos sabios en las suyas". Durante más de un siglo ese resultó ser el caso.

MÁS CONSEJOS SOBRE CONSEJOS

Como indicamos en [el Capítulo 0](#), es fácil encontrar consejos para la mayoría de situaciones. Por ejemplo, para calcular una propina del 10%, simplemente multiplicamos la factura por 0,1 (o dividimos la factura por 10). Por ejemplo, si una factura ascendiera a \$42, entonces una propina del 10% sería de \$4,20. Para determinar una propina del 20%, simplemente multiplica la factura por 0,2, o duplica el monto de una propina del 10%. Por lo tanto, una propina del 20% sobre un billete de \$42 sería de \$8,40.

Para determinar una propina del 15%, tenemos algunas opciones. Si domina las técnicas del [Capítulo 2](#) y se siente cómodo multiplicando por $15 = 5 \times 3$, puede simplemente multiplicar el billete por 15 y luego dividirlo por 100. Por ejemplo, con un billete de \$42, tenemos $42 \times 15 = 42 \times 5 \times 3 = 210 \times 3 = 630$, que al dividirlo entre 100,

nos da una propina de \$6.30. Otro método es tomar el promedio de una propina del 10% y una propina del 20%. Según nuestro cálculo anterior, esto sería

$$\frac{\$4.20 + \$8.40}{2} = \frac{\$12.60}{2} = \$6.30$$

Quizás el enfoque más popular para recibir una propina del 15% es tomar el 10% de la factura, reducir esa cantidad a la mitad (lo que sería una propina del 5%) y luego sumar esos dos números. Entonces, por ejemplo, con un billete de \$42, agregarías \$4,20 más la mitad de esa cantidad, \$2,10, para obtener

$$\$4.20 + \$2.10 = \$6.30$$

Usemos los tres métodos para calcular el 15% de una factura de \$67. Por el método directo, $67 \times 3 \times 5 = 201 \times 5 = 1005$, que al dividirlo por 100 nos da \$10,05. Mediante el método de promediación, promediamos la propina del 10% de \$6,70 con la propina del 20% de \$13,40, para obtener

$$\frac{\$6.70 + \$13.40}{2} = \frac{\$20.10}{2} = \$10.05$$

Usando el último método, agregamos \$6.70 a la mitad de esa cantidad, \$3.35 para obtener

$$\$6,70 + \$3,35 = \$10,05$$

Finalmente, para calcular una propina del 25%, ofrecemos dos métodos. Multiplique la cantidad por 25, luego divida entre 100 o divida la cantidad entre 4 (tal vez cortándola a la mitad dos veces). Por ejemplo, con un billete de \$42, puedes calcular $42 \times 25 = 42 \times 5 \times 5 = 210 \times 5 = 1050$, que cuando se divide por 100 produce una propina de \$10,50. O puedes dividir la cantidad original directamente entre 4, o cortarla por la mitad dos veces: la mitad de \$42 es \$21 y la mitad de eso es \$10,50. Con un billete de \$67, probablemente lo dividiría por 4 directamente: como $67 \div 4 = 16\frac{3}{4}$, obtenemos una propina del 25% de \$16,75.

CÁLCULOS NO DEMASIADOS IMPUESTOS

En esta sección, le mostraré mi método para estimar mentalmente el impuesto sobre las ventas. Para algunas tasas impositivas, como el 5%, el 6% o el 10%, el cálculo es sencillo. Por ejemplo, para calcular el impuesto del 6%, simplemente multiplique por 6 y luego divida por 100. Por ejemplo, si la venta fue de \$58, entonces $58 \times 6 = 348$, que cuando se divide por 100 da el impuesto sobre las ventas exacto de \$3,48. (Por lo tanto, el monto total sería \$61,48).

Pero, ¿cómo calcularía un impuesto sobre las ventas del 6½% sobre \$58? Te mostraré varias formas de hacer este cálculo y tú eliges la que te parezca más sencilla. Quizás la forma más fácil de agregar medio porcentaje a cualquier monto en dólares es simplemente reducir el monto en dólares a la mitad y luego convertirlo en centavos. Por ejemplo, con \$58, dado que la mitad de 58 es 29, simplemente agregue 29 centavos al impuesto del 6% (ya calculado como \$3,48) para obtener un impuesto sobre las ventas de \$3,77.

Otra forma de calcular la respuesta (o una buena estimación mental) es tomar el impuesto del 6%, dividirlo por 12 y luego sumar esos dos números.

Por ejemplo, dado que el 6% de \$58 es \$3,48 y 12 cabe en 348 casi 30 veces, entonces agregue 30 centavos para obtener una estimación de \$3,78, que es solo un centavo. Si prefieres dividir entre 10 en lugar de 12, hazlo. Calculará el 6,6% en lugar del 6,5% (ya que $\frac{6}{10} = 0,6$), pero aun así debería ser una muy buena estimación. Tu aquí

$$\frac{6}{10}$$

tomaría \$3.48 y agregaría 34¢ para obtener \$3.82.

Probemos con otros porcentajes de impuestos sobre las ventas. ¿Cómo podemos calcular el impuesto sobre las ventas del 7¼% sobre \$124? Comience calculando el 7% de 124. A partir de los métodos mostrados en [el Capítulo 2](#), sabe que $124 \times 7 = 868$, por lo que el 7% de 124 es \$8,68. Para sumar un cuarto por ciento, puede dividir la cantidad original en dólares por 4 (o cortarla a la mitad, dos veces) y convertir los dólares en centavos. Aquí, $124 \div 4 = 31$, así que suma 310 a \$8,68 para obtener un impuesto sobre las ventas exacto de \$8,99.

Otra forma de llegar a 31¢ es tomar el impuesto sobre las ventas del 7%, \$8,68, y dividirlo entre 28. La razón por la que esto funciona es porque $\frac{1}{4} = \frac{7}{28}$. Para una estimación mental rápida, probablemente dividiría \$8,68 entre 30, para obtener aproximadamente 29 ¢, para un impuesto total aproximado sobre las ventas de \$8.97.

Cuando divides por 30, en realidad estás calculando un impuesto de $\frac{7}{30}\%$, que es aproximadamente 7,23 % en lugar de 7,25 %.

$$\frac{7}{30}$$

¿Cómo calcularía un impuesto sobre las ventas del 7,75%? Probablemente, para la mayoría de las aproximaciones, sea suficiente decir simplemente que es un poco menos del 8% de impuesto sobre las ventas. Pero para obtener una mejor aproximación, aquí hay algunas sugerencias. Como vio en el último ejemplo, si puede calcular fácilmente un ajuste del $\frac{1}{4}\%$, simplemente triplique esa cantidad para el ajuste del $\frac{3}{4}\%$. Por ejemplo, para calcular el 7,75% de \$124, primero calcula el 7% para obtener \$8,68. Si calculaste que $\frac{1}{4}\%$ son 31¢, entonces $\frac{3}{4}\%$ serían 93¢, para un total general de $\$8,68 + 0,93 = \$9,61$. Para una aproximación rápida, puede aprovechar el hecho de que $0,777$ es aproximadamente $0,75$, por lo que puede dividir el impuesto sobre las ventas del 7% por 9 para obtener un ajuste ligeramente mayor que el 0,75%. En este ejemplo, dado que \$8,68 dividido por 9 es aproximadamente 96 centavos, simplemente agregue $\$8,68 + 0,96 = \$9,64$ para obtener una ligera sobreestimación.

Podemos utilizar este procedimiento de aproximación para cualquier impuesto sobre las ventas. Para obtener una fórmula general, para estimar el impuesto sobre las ventas de $\$AB\%$, primero multiplique el monto de la venta por $A\%$. Luego divide esta cantidad por el número D , donde A/D es igual a $0.B$. (Por lo tanto, D es igual a A multiplicado por el recíproco de B .) Sumar estos números da el impuesto total sobre las ventas (o uno aproximado, si redondeó D a un número cercano más fácil). Por ejemplo, con 7,75%, el divisor mágico D sería el que redondeamos hacia abajo a 9. Para un impuesto sobre las ventas de $\%$, primero calcule el impuesto sobre las ventas sobre el 6%, luego divida ese número entre 16, ya que $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. (Para dividir un número entre 16, divida el número entre 4 dos veces o divida el número entre 8 y luego entre 2.) Trate de idear métodos para encontrar el impuesto sobre las ventas en el estado en el que vive. ¡El problema no es tan agotador como parece!

ALGUNOS CÁLCULOS "INTERESANTES"

Finalmente, mencionaremos brevemente algunos problemas prácticos relacionados con los intereses, desde el punto de vista de ver crecer sus inversiones y pagar el dinero que debe.

Comenzamos con la famosa Regla del 70, que le indica aproximadamente cuánto tiempo le toma a su dinero duplicarse: Para encontrar el

número de años que le tomará a su dinero duplicarse, divida el número 70 por la tasa de interés.

Suponga que encuentra una inversión que promete pagarle un interés del 5% anual. Dado que $70 \div 5 = 14$, su dinero tardará unos 14 años en duplicarse. Por ejemplo, si invirtió \$1000 en una cuenta de ahorros que pagaba ese interés, luego de 14 años tendrá $\$1000(1,05)^{14} = \$1979,93$. Con una tasa de interés del 7%, la Regla del 70 indica que su dinero tardará unos 10 años en duplicarse. De hecho, si invierte \$1000 a esa tasa de interés anual, tendrá después de diez años $\$1000(1,07)^{10} = \$1967,15$. A una tasa del 2%, la Regla del 70 dice que debería tomar alrededor de 35 años duplicarse, como se muestra a continuación:

$$\$1000(1.02)^{35} = \$1999.88$$

Un método similar se llama Regla del 110, que indica cuánto tiempo tarda su dinero en triplicarse. Por ejemplo, con un interés del 5%, dado que $110 \div 5 = 22$, debería llevar unos 22 años convertir \$1000 en \$3000. Esto se verifica mediante el cálculo $\$1000(1,05)^{22} = \$2925,26$. La Regla del 70 y la Regla del 110 se basan en las propiedades del número $e = 2,71828\dots$ y en los "logaritmos naturales" (estudiados en precálculo), pero afortunadamente no necesitamos utilizar estas matemáticas superiores para aplicar las reglas.

Ahora supongamos que pides dinero prestado y tienes que devolverlo. Por ejemplo, supongamos que pide prestado \$360 000 a una tasa de interés anual del 6% anual (lo que interpretaremos en el sentido de que el interés se acumulará a una tasa del 0,5% mensual) y suponga que tiene treinta años para pagar el préstamo. ¿Aproximadamente cuánto tendrás que pagar cada mes? En primer lugar, deberá pagar \$360 000 multiplicado por 0,5 % = \$1 800 cada mes solo para cubrir lo que debe en intereses. (Aunque, en realidad, lo que usted debe en intereses disminuirá gradualmente con el tiempo). Dado que realizará $30 \times 12 = 360$ pagos mensuales, pagar \$1,000 adicionales cada mes cubriría el resto del préstamo, por lo que un límite superior en su pago mensual es $\$1,800 + \$1,000 = \$2,800$. Pero afortunadamente

no necesitas pagar tanto extra. Esta es mi regla general para estimar su pago mensual.

Sea i su tasa de interés mensual. (Esta es su tasa de interés anual dividida por 12.) Entonces, ¿pagar un préstamo de P en N meses, su pago mensual M es aproximadamente

$$M = \frac{Pi(1+i)^N}{(1+i)^N - 1}$$

En nuestro último ejemplo, $P = \$360\,000$ e $i = 0,005$, por lo que nuestra fórmula indica que nuestro pago mensual debe ser de aproximadamente

$$M = \frac{\$360,000(0.005)(1.005)^{360}}{(1.005)^{360} - 1}$$

Observe que los dos primeros números del numerador se multiplican y dan \$1,800. Usando una calculadora (para variar) para calcular $(1,005)^{360} = 6,02$, tenemos que su pago mensual debe ser de aproximadamente $\$1800(6,02)/5,02$, que es aproximadamente \$2160 por mes.

Aquí hay un ejemplo más. Suponga que desea pagar un automóvil y, después del pago inicial, debe pagar \$18 000 en cinco años, con una tasa de interés anual del 4%. Si no hubiera intereses, tendrías que pagar $\$18\,000/60 = \300 por mes. Como el interés del primer año es $\$18\,000(0,04) = \720 , sabes que no tendrás que pagar más de $\$300 + \$60 = \$360$. Usando nuestra fórmula, dado que la tasa de interés mensual es $i = 0,04/12 = 0,00333$, tenemos y como $(1,00333)^{60} = 1,22$, tenemos un pago mensual de aproximadamente $\$60(1,22)/(0,22) = \333 .

$$M = \frac{\$18,000(0.00333)(1.00333)^{60}}{(1.00333)^{60} - 1}$$

Concluimos con algunos ejercicios que esperamos sean de su interés.

EJERCICIOS DE GUESTIMACIÓN

Realice los siguientes ejercicios de estimación matemática; luego verifique sus respuestas y cálculos al final del libro.

EXERCISE: ADDITION GUESSTIMATION

Redondea estos números hacia arriba o hacia abajo y observa qué tan cerca estás de la respuesta exacta:

1.	1479	2.	57,293	3.	312,025	4.	8,971,011
	+ 1105		+ 37,421		+ 79,419		+ 4,016,367

Calcule mentalmente el total de la siguiente columna de precios mediante redondeando al ¢ 50 más cercano:

$$\begin{array}{r}
 \$ 2.67 \\
 1.95 \\
 7.35 \\
 9.21 \\
 0.49 \\
 11.21 \\
 0.12 \\
 6.14 \\
 \underline{8.31}
 \end{array}$$

EXERCISE: SUBTRACTION GUESSTIMATION

Estima los siguientes problemas de resta redondeando al segundo o tercer dígito:

1.	4,926	2.	67,221	3.	526,978	4.	8,349,241
	− 1,659		− 9,874		− 42,009		− 6,103,839

EXERCISE: DIVISION GUESSTIMATION

Ajusta los números de una manera que te permita estimar los siguientes problemas de división:

$$1. \quad 7 \overline{)4379} \quad 2. \quad 5 \overline{)23,958} \quad 3. \quad 13 \overline{)549,213}$$

$$4. \quad 289 \overline{)5,102,357} \quad 5. \quad 203,637 \overline{)8,329,483}$$

EXERCISE: MULTIPLICATION GUESSTIMATION

Ajusta los números de una manera que te permita estimar los siguientes problemas de multiplicación:

$$1. \quad \begin{array}{r} 98 \\ \times 27 \\ \hline \end{array} \quad 2. \quad \begin{array}{r} 76 \\ \times 42 \\ \hline \end{array} \quad 3. \quad \begin{array}{r} 88 \\ \times 88 \\ \hline \end{array} \quad 4. \quad \begin{array}{r} 539 \\ \times 17 \\ \hline \end{array} \quad 5. \quad \begin{array}{r} 312 \\ \times 98 \\ \hline \end{array}$$

$$6. \quad \begin{array}{r} 639 \\ \times 107 \\ \hline \end{array} \quad 7. \quad \begin{array}{r} 428 \\ \times 313 \\ \hline \end{array} \quad 8. \quad \begin{array}{r} 51,276 \\ \times 489 \\ \hline \end{array} \quad 9. \quad \begin{array}{r} 104,972 \\ \times 11,201 \\ \hline \end{array} \quad 10. \quad \begin{array}{r} 5,462,741 \\ \times 203,413 \\ \hline \end{array}$$

EXERCISE: SQUARE ROOT GUESSTIMATION

Estima las raíces cuadradas de los siguientes números usando la método de dividir y promediar:

$$1. \quad \sqrt{17} \quad 2. \quad \sqrt{35} \quad 3. \quad \sqrt{163} \quad 4. \quad \sqrt{4279} \quad 5. \quad \sqrt{8039}$$

EXERCISE: EVERYDAY MATH

1. Calcula el 15% de \$88.
2. Calcula el 15% de \$53.
3. Calcula el 25% de \$74.
4. ¿Cuánto tiempo lleva una tasa de interés anual del 10% para duplicar su dinero?

5. ¿Cuánto tiempo lleva una tasa de interés anual del 6% para duplicar su dinero?
6. ¿Cuánto tiempo lleva una tasa de interés anual del 7% para triplicar su dinero?
7. ¿Cuánto tiempo lleva una tasa de interés anual del 7% para cuadruplicar su dinero?
8. Calcule el pago mensual para pagar un préstamo de \$100 000 a una tasa de interés del 9%.
durante un período de diez años.
9. Calcule el pago mensual para pagar un préstamo de \$30 000 a una tasa de interés del 5%.
durante un período de cuatro años.

Capítulo 6

Matemáticas para la junta:

Matemáticas con lápiz y papel

En la Introducción a este libro hablé de los muchos beneficios que obtendrá al poder hacer cálculos mentales. En este capítulo también presento algunos métodos para acelerar los cálculos con lápiz y papel. Dado que las calculadoras han reemplazado gran parte de la necesidad de utilizar la aritmética con lápiz y papel en la mayoría de las situaciones prácticas, he decidido concentrarme en el arte perdido de calcular raíces cuadradas y el método de cruces cenicientos para multiplicar números grandes. Dado que estos son, sin duda, principalmente para gimnasia mental y no para alguna aplicación práctica, primero abordaré la suma y la resta y le mostraré sólo un par de pequeños trucos para acelerar el proceso y comprobar sus respuestas. Estas técnicas se pueden utilizar en la vida diaria, como verás.

Si está ansioso por abordar los problemas de multiplicación más desafiantes, puede omitir este capítulo e ir directamente al [Capítulo 7](#), que es fundamental para dominar los grandes problemas del [Capítulo 8](#). Si necesita un descanso y solo quiere divertirse, entonces te recomiendo que leas este capítulo; disfrutarás jugando con lápiz y papel una vez más.

COLUMNAS DE NÚMEROS

Sumar largas columnas de números es el tipo de problema con el que te puedes encontrar en los negocios o mientras calculas tus finanzas personales. Agregue la siguiente columna de números como lo haría normalmente
Lo haría y luego comprobaría cómo lo hago.

$$\begin{array}{r}
 4328 \\
 884 \\
 620 \\
 1477 \\
 617 \\
 + 725 \\
 \hline
 8651
 \end{array}$$

Cuando tengo lápiz y papel a mi disposición, sumo los números de arriba a abajo y de derecha a izquierda, tal como aprendimos a hacer en el colegio. Con práctica, podrás resolver estos problemas mentalmente tan rápido o más rápido que con una calculadora. Mientras suma los dígitos, los únicos números que “escucho” son las sumas parciales. Es decir, cuando sumo la primera columna (la más a la derecha) $8 + 4 + 0 + 7 + 7 + 5$, escucho 8... 12... 19... 26... 31. Luego pongo el 1, llevo el 3 y procedo como habitual. La siguiente columna sonaría entonces como 3... 5... 13... 15... 22... 23... 25. Una vez que tengo mi respuesta final, la escribo, luego verifico mi cálculo sumando los números de abajo hacia arriba y, espero, llegar a la misma respuesta.

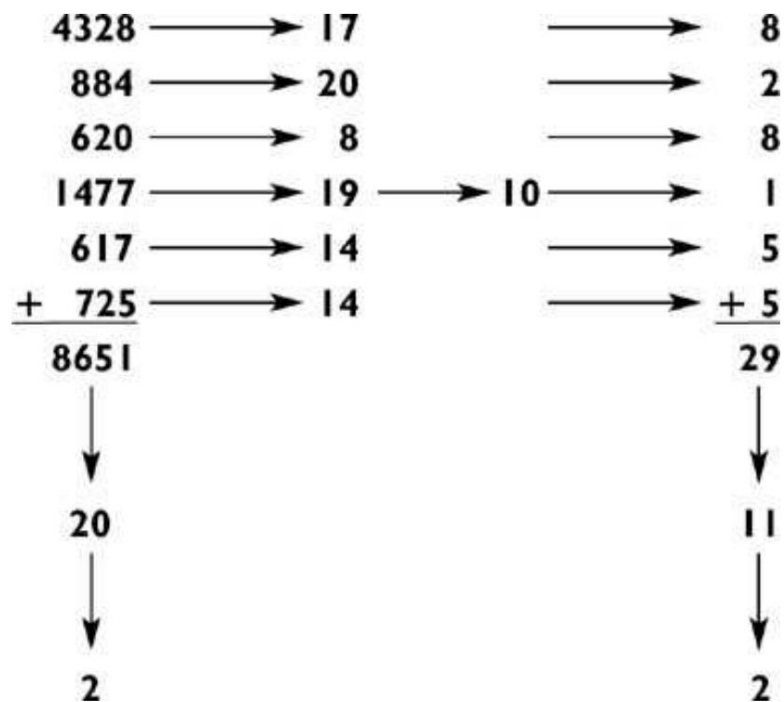
Por ejemplo, la primera columna se sumaría, de abajo hacia arriba, como $5 + 7 + 7 + 0 + 4 + 8$ (que en mi opinión suena como 5... 12... 19... 23... 31). Luego llevo mentalmente el 3, y sumo $3 + 2 + 1 + 7 + 2 + 8 + 2$, y así sucesivamente. Al sumar los números en un orden diferente, es menos probable que cometas el mismo error dos veces.

Por supuesto, si las respuestas difieren, entonces al menos uno de los cálculos debe estar equivocado.

SUMAS MOD

Si no estoy seguro de mi respuesta, a veces reviso mi solución mediante un método que llamo sumas mod (porque se basa en las elegantes matemáticas de la aritmética modular). Este método también se conoce con el nombre de raíces digitales y extracción de nueves. Admito que este método no es tan práctico, pero es fácil de usar.

Con el método de sumas mod, sumas los dígitos de cada número hasta que te quedas con un solo dígito. Por ejemplo, para calcular la suma mod de 4328, suma $4 + 3 + 2 + 8 = 17$. Luego suma los dígitos de 17 para obtener $1 + 7 = 8$. Por lo tanto, la suma mod de 4328 es 8. Para el problema anterior, Las sumas mod de cada número se calculan de la siguiente manera:



Como se ilustra arriba, el siguiente paso es sumar todas las sumas mod ($8 + 2 + 8 + 1 + 5 + 5$). Esto produce 29, que suma 11, que a su vez suma 2. Tenga en cuenta que la suma mod de 8651, el total original de los dígitos originales, también es 2. ¡Esto no es una coincidencia! Si has calculado correctamente la respuesta y las sumas mod, tus sumas mod finales deben ser las mismas. Si son diferentes, definitivamente has cometido un error en alguna parte: hay una probabilidad de 1 entre 9 de que las sumas mod coincidan accidentalmente. Si hay un error, este método lo detectará 8 de cada 9 veces.

Los matemáticos y contadores conocen más comúnmente el método de la suma mod como sacar nueves porque la suma mod de un número resulta ser igual al resto obtenido cuando el número se divide por 9. En el caso de la respuesta

arriba, 8651, la suma mod fue 2. Si divides 8651 entre 9, la respuesta es 961 con un resto de 2. En otras palabras, si eliminas 9 de 8651 un total de 961 veces, tendrás un resto de 2.

Hay una pequeña excepción a esto. Recuerde que la suma de los dígitos de cualquier múltiplo de 9 también es múltiplo de 9. Por lo tanto, si un número es múltiplo de 9, tendrá una suma mod de 9, aunque tenga un resto de 0.

RESTA EN PAPEL

Por supuesto, no puedes restar columnas de números de la misma manera que las sumas. Más bien, los restas número por número, lo que significa que todos los problemas de resta involucran solo dos números. Una vez más, con lápiz y papel a nuestra disposición, es más fácil restar de derecha a izquierda. Para verificar tu respuesta, simplemente suma la respuesta al segundo número. Si está en lo cierto, entonces debería obtener el número superior.

Si lo deseas, también puedes utilizar sumas mod para comprobar tu respuesta. La clave es restar las sumas mod a las que llegas y luego comparar ese número con la suma mod de tu respuesta:

$$\begin{array}{rcl}
 65,717 & \longrightarrow & 8 \\
 - 38,491 & \longrightarrow & -7 \\
 \hline
 27,226 & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 19 & \longrightarrow & 10
 \end{array}$$

Hay un giro extra. Si la diferencia en las sumas mod es un número negativo o 0, súmale 9. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 42,689 \\
 - 18,764 \\
 \hline
 23,925 \\
 \downarrow \\
 21 \\
 \downarrow \\
 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \\
 - 8 \\
 - 6 + 9 = 3
 \end{array}$$

RAÍCES CUADRADAS DE LÁPIZ Y PAPEL

Con la llegada de las calculadoras de bolsillo, el método de lápiz y papel para calcular raíces cuadradas prácticamente se ha convertido en un arte perdido. Ya has visto cómo estimar mentalmente raíces cuadradas. Ahora te mostraré cómo hacerlo exactamente, usando lápiz y papel.

¿Recuerdas que al estimar raíces cuadradas calculaste la raíz cuadrada de diecinueve? Veamos ese problema nuevamente, esta vez usando un método que le dará la raíz cuadrada exacta.

$$\begin{array}{r}
 4. \ 3 \ 5 \ 8 \\
 \sqrt{19.000000} \\
 4^2 = \underline{16} \\
 8 _ \times _ \leq 3 \ 00 \\
 83 \times 3 = \underline{2 \ 49} \\
 86 _ \times _ \leq 5 \ 100 \\
 865 \times 5 = \underline{4325} \\
 870 _ \times _ \leq 77500 \\
 8708 \times 8 = \underline{69664}
 \end{array}$$

Describiré el método general que se adapta a todos los casos y lo ilustraré con el ejemplo anterior.

Paso 1. Si el número de dígitos a la izquierda del punto decimal es uno, tres, cinco, siete o cualquier número impar de dígitos, el primer dígito de la respuesta (o cociente) será el número más grande cuyo cuadrado sea menor que el primer dígito del número original. Si el número de dígitos a la izquierda del punto decimal es dos, cuatro, seis o cualquier número par de dígitos, el primer dígito del cociente será el número más grande cuyo cuadrado sea menor que los dos primeros dígitos del dividendo. En este caso, 19 es un número de dos dígitos, por lo que el primer dígito del cociente es el número más grande cuyo cuadrado es menor que 19. Ese número es 4. Escribe la respuesta encima del primer dígito del dividendo (si es impar) o del segundo dígito del dividendo (si es par).

Paso 2. Resta el cuadrado del número en el paso 1, luego baja dos dígitos más. Como $4^2 = 16$, restamos $19 - 16 = 3$. Bajamos dos ceros, dejando 300 como resto actual.

Paso 3. Duplique el cociente actual (ignorando cualquier punto decimal) y coloque un espacio en blanco a continuación. Aquí $4 \times 2 = 8$. Coloque 8_ x_ a la izquierda del resto actual, en este caso 300.

Paso 4. El siguiente dígito del cociente será el número más grande que se pueda poner en ambos espacios en blanco para que el problema de multiplicación resultante sea menor o igual al resto actual. En este caso el número es 3, porque $83 \times 3 = 249$, mientras que $84 \times 4 = 336$, que es demasiado alto. Escriba este número encima del segundo dígito de los dos números siguientes; en este caso el 3 estaría por encima del segundo 0. Ahora tenemos un cociente de 4,3.

Paso 5. Si desea más dígitos, reste el producto del resto (es decir, $300 - 249 = 51$) y baje los siguientes dos dígitos; en este caso 51 se convierte en 5100, que se convierte en el resto actual. Ahora repite los pasos 3 y 4.

Para obtener el tercer dígito de la raíz cuadrada, duplica el cociente, ignorando nuevamente el punto decimal (es decir, $43 \times 2 = 86$). Coloque 86_ x_ a la izquierda de 5100. El número 5 nos da $865 \times 5 = 4325$, el producto más grande por debajo de 5100. El 5 va por encima de los dos siguientes

números, en este caso dos ceros más. Ahora tenemos un cociente de 4,35.

Para obtener aún más dígitos, repita el proceso como lo hemos hecho en el ejemplo.

A continuación se muestra un ejemplo de un número impar de dígitos antes del punto decimal:

$$\begin{array}{r}
 28.97 \\
 \sqrt{839.4000} \\
 2^2 = 4 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 4 _ \times _ \leq 439 \\
 48 \times 8 = 384 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 56 _ \times _ \leq 5540 \\
 569 \times 9 = 5121 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 578 _ \times _ \leq 41900 \\
 5787 \times 7 = 40509
 \end{array}$$

A continuación, calcularemos la raíz cuadrada de un número de cuatro dígitos. En este caso, como ocurre con los números de dos dígitos, consideramos los dos primeros dígitos del problema para determinar el primer dígito de la raíz cuadrada:

$$\begin{array}{r}
 82.06 \\
 \sqrt{6735.0000} \\
 8^2 = 64 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 16 _ \times _ \leq 335 \\
 162 \times 2 = 324 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 164 _ \times _ \leq 1100 \\
 1640 \times 0 = \quad \underline{\hspace{1cm}} 0 \\
 1640 _ \times _ \leq 110000 \\
 16406 \times 6 = \quad \underline{\hspace{1cm}} 98436
 \end{array}$$

Finalmente, si el número para el cual estás calculando la raíz cuadrada es un cuadrado perfecto, lo sabrás tan pronto como termines con un resto de 0 y nada que bajar. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 3.3 \\
 \sqrt{10.89} \\
 3^2 = 9 \\
 \underline{6 \times \leq 189} \\
 63 \times 3 = 189 \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN CON LÁPIZ Y PAPEL

Para la multiplicación con lápiz y papel utilizo el método entrecruzado, que me permite escribir la respuesta completa en una línea sin tener que escribir ningún resultado parcial. Esta es una de las demostraciones de magia matemática más impresionantes cuando tienes lápiz y papel a tu disposición. Muchas calculadoras relámpago en el pasado se ganaron su reputación con este método. Se les darían dos números grandes y escribirían la respuesta casi instantáneamente. El método entrecruzado se aprende mejor con el ejemplo.

$$\begin{array}{r}
 47 \\
 \times 34 \\
 \hline
 1598
 \end{array}$$

Paso 1. Primero, multiplica 4×7 para obtener 28, escribe el 8 y mentalmente lleva el 2 al siguiente cálculo, a continuación.

$$\begin{array}{cc}
 4 & 7 \\
 & | \\
 3 & 4
 \end{array}$$

Paso 2. Siguiendo el diagrama, suma $2 + (4 \times 4) + (3 \times 7) = 39$, escribe el 9 y lleva el 3 al cálculo final, a continuación.

$$\begin{array}{cc}
 4 & 7 \\
 & \times \\
 3 & 4
 \end{array}$$

Paso 3. Termina sumando $3 + (3 \times 4) = 15$ y escribiendo 15 para llegar a tu respuesta final.

$$\begin{array}{r} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ | \\ 4 \end{array}$$

Ya has escrito la respuesta: 1598.

Resolvamos otro problema de multiplicación de 2 por 2 usando el método entrecruzado:

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 65 \\ \hline 5395 \end{array}$$

Los pasos y diagramas aparecen de la siguiente manera:

Paso 1. $5 \times 3 = 15$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 3 \\ 6 \quad 5 \end{array}$$

Paso 2. $1 + (5 \times 8) + (6 \times 3) = 59$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 3 \\ 6 \quad 5 \end{array}$$

Paso 3. $5 + (6 \times 8) = 53$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 3 \\ 6 \quad 5 \end{array}$$

Respuesta: 5395

El método entrecruzado se vuelve un poco más complicado con problemas de 3 por 3.

$$\begin{array}{r} 853 \\ \times 762 \\ \hline 649,986 \end{array}$$

Procedemos como lo sugiere nuestro patrón a continuación:

Paso 1. $2 \times 3 = 6$

$$\begin{array}{ccc} 8 & 5 & 3 \\ 7 & 6 & 2 \end{array}$$

Paso 2. $(2 \times 5) + (6 \times 3) = 28$

$$\begin{array}{ccc} 8 & 5 & 3 \\ 7 & 6 & 2 \end{array}$$

Paso 3. $2 + (2 \times 8) + (7 \times 3) + (6 \times 5) = 69$

$$\begin{array}{ccc} 8 & 5 & 3 \\ 7 & 6 & 2 \end{array}$$

Paso 4. $6 + (6 \times 8) + (7 \times 5) = 89$

$$\begin{array}{ccc} 8 & 5 & 3 \\ 7 & 6 & 2 \end{array}$$

Paso 5. $8 + (8 \times 7) = 64$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 5 \quad 3 \\ | \quad \quad \quad \\ 7 \quad 6 \quad 2 \end{array}$$

Respuesta: 649,986

Observa que el número de multiplicaciones en cada paso es 1, 2, 3, 2 y 1 respectivamente. Las matemáticas que subyacen al método entrecruzado no son más que la ley distributiva. Por ejemplo, $853 \times 762 = (800 + 50 + 3) \times (700 + 60 + 2) = (3 \times 2) + [(5 \times 2) + (3 \times 6)] \times 10 + [(8 \times 2) + (5 \times 6) + (3 \times 7)] \times 100 + [(8 \times 6) + (5 \times 7)] \times 1000 + (8 \times 7) \times 10.000$, que son precisamente los cálculos de las criss- método cruzado.

Puedes verificar tu respuesta con el método de la suma mod multiplicando las sumas mod de los dos números y calculando la suma mod del número resultante. Compara este número con la suma mod de la respuesta. Si tu respuesta es correcta, deben coincidir. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 853 \\ \times 762 \\ \hline 649,986 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \times 6 \\ \hline 42 \\ \downarrow \\ 6 \end{array}$$

Si las sumas mod no coinciden, cometiste un error. Este método detectará errores, en promedio, aproximadamente 8 de cada 9 veces.

En el caso de problemas de multiplicación de 3 por 2, el procedimiento es el mismo excepto que tratas el dígito de las centenas del segundo número como un 0:

$$\begin{array}{r} 846 \\ \times 037 \\ \hline 31,302 \end{array}$$

Paso 1. $7 \times 6 = 42$ —

8	4	6
0	3	7

Paso 2. $4 + (7 \times 4) + (3 \times 6) = 50$ —

8	4	6
0	3	7

Paso 3. $5 + (7 \times 8) + (0 \times 6) + (3 \times 4) = 73$ —

8	4	6
0	3	7

Paso 4. $7 + (3 \times 8) + (0 \times 4) = 31$ —

8	4	6
0	3	7

Paso 5. $3 + (0 \times 8) = 3$ —

8	4	6
0	3	7

Respuesta: 31,302

Por supuesto, normalmente ignorarías la multiplicación por cero, en la práctica.

Puedes usar el entrecruzado para resolver problemas de multiplicación de cualquier tamaño. Para responder al siguiente problema de 5 por 5 se necesitarán nueve pasos. El

El número de multiplicaciones en cada paso es 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, para veinticinco multiplicaciones en total.

$$\begin{array}{r} 42,867 \\ \times 52,049 \\ \hline 2,231,184,483 \end{array}$$

Paso 1. $9 \times 7 = 63$ _

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ & & & & | \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 9 \end{array}$$

Paso 2. $6 + (9 \times 6) + (4 \times 7) = 88$ _

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ & & & \diagdown & \diagup \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 9 \end{array}$$

Paso 3. $8 + (9 \times 8) + (0 \times 7) + (4 \times 6) = 104$ _

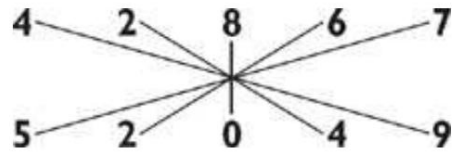
$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ & & \diagdown & | & \diagup \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 9 \end{array}$$

Paso 4. $10 + (9 \times 2) + (2 \times 7) + (4 \times 8) + (0 \times 6) = 74$ _

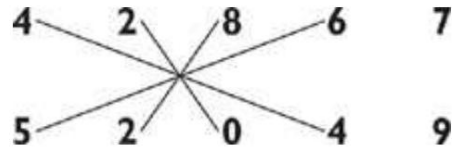
$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 9 \end{array}$$

Paso 5. $7 + (9 \times 4) + (5 \times 7) + (4 \times 2) + (2 \times 6) + (0 \times 8) = 98$

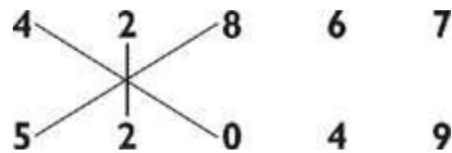
_



Paso 6. $9 + (4 \times 4) + (5 \times 6) + (0 \times 2) + (2 \times 8) = 71$



Paso 7. $7 + (0 \times 4) + (5 \times 8) + (2 \times 2) = 51$



Paso 8. $5 + (2 \times 4) + (5 \times 2) = 23$



Paso 9. $(5 \times 4) + 2 = 22$



Respuesta: 2,231,184,483

Puedes verificar tu respuesta usando el método de sumas mod.

$$\begin{array}{r}
 42,867 \longrightarrow 9 \\
 \times 52,049 \longrightarrow \times 2 \\
 \hline
 2,231,184,483 \\
 \downarrow \\
 36 \\
 \downarrow \\
 9
 \end{array}$$

EXPULSANDO A LOS ONCE

Para verificar tu respuesta de otra manera, puedes usar el método conocido como descartar onces. Es similar a sacar nueves, excepto que se reducen los números restando y sumando alternativamente los dígitos de derecha a izquierda, ignorando cualquier punto decimal. Si el resultado es negativo, se le suma once. (Puede resultar tentador hacer la suma y la resta de izquierda a derecha, como se hace con las sumas mod, pero en este caso debes hacerlo de derecha a izquierda para que funcione). Por ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 234.87 \longrightarrow 7 - 8 + 4 - 3 + 2 = 2 \longrightarrow 2 \\
 + 58.61 \longrightarrow 1 - 6 + 8 - 5 = -2 \longrightarrow 9 \\
 \hline
 293.48 \longrightarrow 8 - 4 + 3 - 9 + 2 = 0 \longrightarrow 11 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

El mismo método funciona para problemas de resta:

$$\begin{array}{r}
 65,717 \longrightarrow 14 \longrightarrow 3 \\
 - 38,491 \longrightarrow -(-9) \longrightarrow +9 \\
 \hline
 27,226 \longrightarrow 12 \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Shakuntala Devi: ¡Eso es incalculable!

En 1976, el New York Times informó que una mujer india llamada Shakuntala Devi (n. 1939) añadió

25.842 + 111.201.721 + 370.247.830 + 55.511.315, y luego multiplicó esa suma por 9.878, para un total correcto de 5.559.369.456.432, todo en menos de veinte segundos. Es difícil de creer, aunque esta hija sin educación de padres empobrecidos se ha hecho un nombre en Estados Unidos y Europa como calculadora relámpago.

Desafortunadamente, la mayoría de las hazañas realmente asombrosas de Devi que no se lograron mediante "trucos del oficio" obvios están mal documentadas. Su mayor logro, la multiplicación cronometrada de dos números de trece dígitos en papel, ha aparecido en el Libro Guinness de los Récords Mundiales como un ejemplo de "computadora humana". El momento del cálculo, sin embargo, es, en el mejor de los casos, cuestionable. Devi, una 7.686.369.774.870 × maestra del método entrecruzado, supuestamente multiplicó 2.465.099.745.799, números generados aleatoriamente en el departamento de informática del Imperial College de Londres, el 18 de junio de 1980. Su respuesta correcta de 18.947.668.177.995.426.773.730 supuestamente se generó en unos increíbles veinte segundos. Guinness ofrece este descargo de responsabilidad: "Algunos escritores matemáticos eminentes han cuestionado las condiciones bajo las cuales aparentemente se logró esto y predicen que sería imposible para ella replicar tal hazaña bajo una vigilancia muy rigurosa". Como tuvo que calcular 169 problemas de multiplicación y 167 problemas de suma, para un total de 336 operaciones, habría tenido que hacer cada cálculo en menos de una décima de segundo, sin errores, tomándose el tiempo para escribir los 26 dígitos de la respuesta. El tiempo de reacción por sí solo hace que este disco esté realmente en la categoría

A pesar de esto, Devi ha demostrado sus habilidades haciendo cálculos rápidos e incluso ha escrito su propio libro sobre el tema.

Incluso funciona con la multiplicación:

$$\begin{array}{r}
 853 \longrightarrow 6 \\
 \times 762 \longrightarrow \times 3 \\
 \hline
 649,986 \longrightarrow 18 \\
 \downarrow \\
 -4 \\
 \downarrow \\
 7
 \end{array}$$

Si los números no coinciden, cometiste un error en alguna parte. Pero si coinciden, aún es posible que exista un error. En promedio, este método detectará un error 10 de cada 11 veces. Por lo tanto, un error tiene una probabilidad de 1 entre 11 de pasar la prueba de los once, una probabilidad de 1 entre 9 de pasar la prueba de los nueve y sólo una probabilidad de 1 entre 99. de no ser detectado si se utilizan ambas comprobaciones. Para obtener más información sobre este y otros temas matemáticos fascinantes, le recomiendo que lea cualquiera de los libros de matemáticas recreativos de Martin Gardner.

Ahora estás listo para el último problema de multiplicación con lápiz y papel del libro: ¡un 10 por 10! Esto no tiene ningún valor práctico excepto para mostrarlo. (Y personalmente creo que multiplicar números de cinco dígitos es bastante impresionante ya que la respuesta estará en la capacidad de la mayoría de las calculadoras). Lo presentamos aquí solo para demostrar que se puede hacer. Los cruces siguen el mismo patrón básico que el del problema de 5 por 5. ¡Habrá diecinueve pasos de cálculo y en el décimo paso habrá diez cruces! Aquí tienes:

$$\begin{array}{r}
 2,766,829,451 \\
 \times 4,425,575,216 \\
 \hline
 \end{array}$$

Así es como lo hacemos:

Paso 1. $6 \times 1 = 6$ _

Paso 2. $(6 \times 5) + (1 \times 1) = 31$ Paso 3. _

$3 + (6 \times 4) + (2 \times 1) + (1 \times 5) = 34$ Paso 4. $3 + (6 \times 9)$ _

$(5 \times 1) + (1 \times 4) + (2 \times 5) = 76$ Paso 5. $7 + (6 \times 2) + (7 \times 1) + (1 \times 9)$ _

$+ (5 \times 5) + (2 \times 4) = 68$ Paso 6. $6 + (6 \times 8) + (5 \times 1) + (1 \times 2) + (7 \times 5) + (2 \times 9)$ _

$+ (5 \times 4) = 134$ Paso 7. $13 + (6 \times 6) + (5 \times 1) + (1 \times 8) + (5 \times 5) + (2 \times 2) + (7 \times 4) + (5 \times$ _

$9) = 164$ _

Paso 8. $16 + (6 \times 6) + (2 \times 1) + (1 \times 6) + (5 \times 5) + (2 \times 8) + (5 \times 4) + (5 \times$
 $2) + (7 \times 9) = 194$ _

Paso 9. $19 + (6 \times 7) + (4 \times 1) + (1 \times 6) + (2 \times 5) + (2 \times 6) + (5 \times 4) + (5 \times$
 $8) + (5 \times 9) + (7 \times 2) = 212$ _

Paso 10. $21 + (6 \times 2) + (4 \times 1) + (1 \times 7) + (4 \times 5) + (2 \times 6) + (2 \times 4) + (5 \times$
 $6) + (5 \times 9) + (7 \times 8) + (5 \times 2) = 225$ _

Paso 11. $22 + (1 \times 2) + (4 \times 5) + (2 \times 7) + (4 \times 4) + (5 \times 6) + (2 \times 9) + (7 \times$
 $6) + (5 \times 2) + (5 \times 8) = 214$ _

Paso 12. $21 + (2 \times 2) + (4 \times 4) + (5 \times 7) + (4 \times 9) + (7 \times 6) + (2 \times 2) + (5 \times$
 $6) + (5 \times 8) = 228$ _

Paso 13. $22 + (5 \times 2) + (4 \times 9) + (7 \times 7) + (4 \times 2) + (5 \times 6) + (2 \times 8) + (5 \times$
 $6) = 201$ _

Paso 14. $20 + (7 \times 2) + (4 \times 2) + (5 \times 7) + (4 \times 8) + (5 \times 6) + (2 \times 6) = 151$ Paso 15. $15 + (5 \times$ _

$2) + (4 \times 8) + (5 \times 7) + (4 \times 6) + (2 \times 6) = 128$ Paso 16. $12 + (5 \times 2) + (4 \times 6) + (2 \times$ _

$7) + (4 \times 6) = 84$ Paso 17. $8 + (2 \times 2) + (4 \times 6) + (4 \times 7) = 64$ Paso 18. _

$6 + (4 \times 2) + (4 \times 7) = 42$ Paso 19. $4 + (4 \times 2) = 12$ _

—

—

Si pudiste resolver con éxito este problema extremadamente difícil la primera vez,
¡estás a punto de graduarte de aprendiz a maestro matemático!

$$\begin{array}{r} 2,766,829,451 \longrightarrow 5 \\ \times 4,425,575,216 \longrightarrow 5 \\ \hline 12,244,811,845,244,486,416 \longrightarrow 7 \end{array}$$

EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL

EXERCISE: COLUMNS OF NUMBERS

Sume la siguiente columna de números y verifique su respuesta leyendo la columna de abajo hacia arriba y luego mediante el método de sumas mod. Si las dos sumas mod no coinciden, vuelva a verificar su suma:

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 672 \\
 1367 \\
 107 \\
 7845 \\
 358 \\
 210 \\
 + 916 \\
 \hline
 \end{array}$$

Sume esta columna de dólares y centavos:

$$\begin{array}{r}
 2. \quad \$ 21.56 \\
 19.38 \\
 211.02 \\
 9.16 \\
 26.17 \\
 + 1.43 \\
 \hline
 \end{array}$$

EXERCISE: SUBTRACTING ON PAPER

Resta los siguientes números, usando sumas mod para verificar tu respuesta y luego sumando los dos números inferiores para obtener el número superior:

$$\begin{array}{rclcl}
 1. & 75,423 & 2. & 876,452 & 3. & 3,249,202 & 4. & 45,394,358 \\
 - & 46,298 & - & 593,876 & - & 2,903,445 & - & 36,472,659 \\
 \hline & & \hline & & \hline & & \hline &
 \end{array}$$

EXERCISE: SQUARE ROOT GUESSTIMATION

Para los siguientes números, calcula la raíz cuadrada exacta usando la técnica de duplicar y dividir.

1. $\sqrt{15}$ 2. $\sqrt{502}$ 3. $\sqrt{439.2}$ 4. $\sqrt{361}$

EXERCISE: PENCIL-AND-PAPER MULTIPLICATION

Para concluir esta sesión de ejercicio, utilice el método entrecruzado para calcular problemas de multiplicación exactos de cualquier tamaño. Coloque la respuesta debajo de los problemas en una línea, de derecha a izquierda. Comprueba tus respuestas usando sumas mod.

1. $\begin{array}{r} 54 \\ \times 37 \\ \hline \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 273 \\ \times 217 \\ \hline \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 725 \\ \times 609 \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 3,309 \\ \times 2,868 \\ \hline \end{array}$ 5. $\begin{array}{r} 52,819 \\ \times 47,820 \\ \hline \end{array}$ 6. $\begin{array}{r} 3,923,759 \\ \times 2,674,093 \\ \hline \end{array}$

Capítulo 7

Un capítulo memorable: Memorizar números

Una de las preguntas más comunes que me hacen tiene que ver con mi memoria. No, no tengo una memoria extraordinaria. Más bien, aplico un sistema de memoria que cualquiera puede aprender y que se describe en las páginas siguientes. De hecho, los experimentos han demostrado que a casi cualquier persona con una inteligencia promedio se le puede enseñar a mejorar enormemente su capacidad para memorizar números.

En este capítulo le enseñaremos una forma de mejorar su memoria para los números. Esto no sólo tiene beneficios prácticos obvios, como recordar fechas o números de teléfono, sino que también permite al matemático resolver mentalmente problemas mucho más grandes. ¡En el próximo capítulo te mostraremos cómo aplicar las técnicas de este capítulo para multiplicar números de cinco dígitos en tu cabeza!

USO DE MNEMÓNICOS

El método presentado aquí es un ejemplo de mnemónico, es decir, una herramienta para mejorar la codificación y recuperación de la memoria. Los mnemónicos funcionan convirtiendo datos incomprensibles (como secuencias de dígitos) en algo más significativo. Por ejemplo, tómame un momento para memorizar la siguiente frase:

“Mi tortuga Pancho, mi amor, recogerá a mi nuevo motor, Ginger”.

Léelo varias veces. Aparta la vista de la página y repítelo una y otra vez hasta que no tengas que volver a mirar la página, visualizando a la tortuga, Pancho, recogiendo a tu nuevo motor, Ginger, mientras lo haces. ¿Entiendo?

¡Felicidades! Acabas de memorizar los primeros veinticuatro dígitos de la expresión matemática π (pi). Recuerde que π es la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, que generalmente se aproxima en la escuela a 3,14, o $\frac{22}{7}$. De hecho, π es un número irracional (uno cuyos dígitos continúan indefinidamente sin repetición ni patrón), y se han utilizado computadoras para calcular π en miles de millones de lugares.

EL CÓDIGO FONÉTICO

Estoy seguro de que te estarás preguntando cómo se traduce “Mi tortuga Pancho, mi amor, recogerá a mi nuevo motor, Ginger” en 24 lugares de la π .

Para hacer esto, primero necesita memorizar el código fonético a continuación, donde a cada número entre 0 y 9 se le asigna un sonido consonante.

1 es el sonido t o d . 2 es el
sonido n . 3 es el sonido
m . 4 es el sonido r . 5
es el sonido l . 6 es el
sonido j, ch o sh . 7 es
el sonido k o g fuerte . 8 es el sonido
f o v . 9 es el sonido p o b . 0 es el
sonido z o s.

Memorizar este código no es tan difícil como parece. Por un lado, observe que en los casos en que más de una letra está asociada con un número, tienen pronunciaciones similares. Por ejemplo, el sonido k (como aparece en palabras como cometa o gato) es similar al sonido g fuerte (como aparece en palabras como cabra). También puedes confiar en los siguientes trucos para ayudarte a memorizar el código:

- 1 Una t o d escrita a máquina tiene solo 1 trazo descendente.
- 2 Una n mecanografiada tiene 2 trazos descendentes.
- 3 Una m escrita a máquina tiene 3 trazos descendentes.
- 4 El número 4 termina en la letra r.
- 5 Dale forma a tu mano con 4 dedos hacia arriba y el pulgar en un ángulo de 90 grados: son 5 dedos en forma de L.

6 A J parece un 6 al revés.

Se puede sacar 7 AK colocando dos 7 uno detrás del otro.

8 Una f minúscula escrita en cursiva parece un 8.

9 El número 9 parece una p al revés o una b al revés .

0 La palabra cero comienza con la letra z.

¡O simplemente puedes recordar la lista en orden, pensando en el nombre Tony Marloshkovips!

Practica recordar esta lista. En unos diez minutos deberías tener todos los números de un dígito asociados con los sonidos de consonantes.

A continuación, puedes convertir números en palabras colocando sonidos de vocales alrededor o entre los sonidos de consonantes. Por ejemplo, el número 32 puede convertirse en cualquiera de las siguientes palabras: hombre, hombres, mío, melena, luna, muchos, dinero, menú, amén, presagio, amino, mini, minnie, etc. Observe que la palabra minnie es aceptable ya que el sonido n solo se usa una vez.

Las siguientes palabras no podrían representar el número 32 porque utilizan otros sonidos consonánticos: llorar, melón, menta. Estas palabras estarían representadas por los números 342, 352 y 321, respectivamente. Los sonidos de consonantes de h, w e y se pueden agregar libremente ya que no aparecen en la lista. Por lo tanto, 32 también puede convertirse en humano, mujer, yeoman o mi amor.

La siguiente lista le da una buena idea de los tipos de palabras que puede crear usando este código fonético. No se sienta obligado a memorizarlo; utilícelo como inspiración para explorar las posibilidades por su cuenta.

1 corbata

2 rodilla

3 emúes

4 oreja

5 ley

6 zapato

7 vaca

8 hiedra

9 abeja

10 dados

11 años

12 latas

13 tumba

14 neumáticos

15 toalla

16 plato

17 pato

18 paloma

19 tina

20 nariz

21 nuez

22 monja

23 nombre

24 Nerón

25 uñas

26 muescas

27 cuello

28 cuchillo

29 perilla

30 ratón

31 estera

32 luna

33 momia

34 cortacésped

35 mula

36 partido

37 taza

38 película

39 mapa

40 rosa

41 varilla

42 lluvia

43 carnero

44 trasero

45 rollos

46 cucaracha

47 roca

48 techo

49 cuerda

50 encaje

51 luz

52 león

53 cordero

54 señuelo

55 lirio

56 correa

57 registro

58 hojas

59 labio

60 quesos

61 hoja

62 cadena

63 amigo

64 cereza

65 cárcel

66 juez

67 tiza

68 cocinero

69 barco

70 beso

71 cometa

72 monedas

73 peine

74 coche

75 carbón

76 jaula

77 pastel

78 cueva

79 gorra

80 cara

81 pelea

82 teléfono

83 espuma

84 re

85 libras

86 pesos

87 niebla

88fe _

89 VIP

90 autobús

91 murciélago

92 bollo

93 bomba

94 oso

95 campana

96 playa

97 libro

98 unidades

99 cachorro

100 margaritas

La lista de números y palabras

Para practicar, traduce los siguientes números en palabras y luego verifica la traducción correcta a continuación. Al traducir números a palabras, se pueden formar una variedad de palabras:

42

74

67

86

93

10

55

826

951

620

367

Aquí hay algunas palabras que se me ocurrieron:

42: lluvia, rinoceronte, Reno, ruina, urna

74: coche, llorar, gurú, llevar

67: jarra, shock, tiza, broma, sacudida, secuestro

86: mierda, dulce de azúcar

93: culo, bomba, rayo, palma, pam

10: lanzamiento, dados, dedos de los pies, mareado, avena, sombreros

55: lirio, lola, ¡aleluya!

826: nch, terminar, desaparecer

951: piloto, trama, cinturón, cerrojo, bala

620: jeans, cadenas, genio

367: ¡ magia!

Como ejercicio, traduzca cada una de las siguientes palabras a su número único:

perro
horno
carro
fósil
banana
cochera
lápiz
barro
multiplicación
cleveland
Ohio

Respuestas:

perro:	17
horno:	82
carro:	741
fósil:	805
banana:	922
cochera:	746
lápiz:	9.205
Barro:	31
multiplicación:	35.195.762

Cleveland: 758,521

Ohio: (nada)

Aunque un número normalmente se puede convertir en muchas palabras, una palabra sólo se puede traducir en un único número. Esta es una propiedad importante para nuestras aplicaciones, ya que nos permite recordar números específicos.

Con este sistema, puede traducir cualquier número o serie de números (por ejemplo, números de teléfono, números de Seguro Social, números de licencia de conducir, los dígitos de p) en una palabra u oración. Así es como funciona el código para traducir los primeros veinticuatro dígitos de p:

3 1415 926 5 3 58 97 9 3 2 384 6264

“My turtle Pancho will, my love, pick up my new mover, Ginger.”

Recuerde que, con este código fonético, g es un sonido fuerte, como en hierba, por lo que una g suave (como en Ginger) suena como j y se representa con un 6. Además, la palabra will es, fonéticamente, solo L, y está representado por 5, ya que el sonido consonante w se puede utilizar libremente. Dado que esta oración sólo se puede traducir a los veinticuatro dígitos anteriores, ¡has memorizado efectivamente p a veinticuatro dígitos!

No hay límite para la cantidad de números que este código le permitirá memorizar. Por ejemplo, las siguientes dos oraciones, cuando se agregan a “Mi tortuga Pancho, mi amor, recogerá a mi nuevo motor, Ginger”, te permitirán memorizar los primeros sesenta dígitos de p:

3 38 327 950 2 8841 971

“My movie monkey plays in a favorite bucket.”

Y:

69 3 99 375 1 05820 97494

“Ship my puppy Michael to Sullivan’s backrubber.”

Qué diablos, vayamos por cien dígitos:

45 92 307 81 640 62 8 620
“A really open music video cheers Jenny F. Jones.”

8 99 86 28 0 3482 5 3421 1 7067
“Have a baby fish knife so Marvin will marinate the goosechick.”

Realmente podrás sentirte orgulloso de ti mismo una vez que estas oraciones salgan de tu lengua y puedas traducirlas rápidamente a números. Pero tienes mucho camino por recorrer para lograr el récord mundial. Hiroyuki Goto de Japón recitó 42.195 lugares, de memoria, en diecisiete horas y veintiún minutos en 1995.

CÓMO LA MNEMONICÍA FACILITA EL CÁLCULO MENTAL

Además de mejorar su capacidad para memorizar largas secuencias de números, las mnemónicas se pueden utilizar para almacenar resultados parciales en medio de un cálculo mental difícil. Por ejemplo, así es como puedes usar mnemónicos para ayudarte a elevar al cuadrado un número de tres dígitos:

Un trozo de Pi para Alexander Craig Aitken

PAG Quizás una de las hazañas más impresionantes del cálculo mental la realizó un profesor de matemáticas de la Universidad de Edimburgo, Alexander Craig Aitken (1895-1967), quien no sólo aprendió el valor de π elevado a 1.000 lugares sino que, cuando se le pidió que demostrara su Un recuerdo asombroso durante una conferencia, rápidamente recitó los primeros 250 dígitos de la π . Luego se le retó a saltar adelante y comenzar en el dígito 551 y continuar por otros 150 lugares. Esto lo hizo con éxito y sin un solo error.

¿Cómo lo hizo? Aitken explicó a su audiencia que “el secreto, en mi opinión, es la relajación, la completa antítesis de la concentración habitual”.

comprendido." La técnica de Aitken fue más auditiva de lo habitual. Ordenó los números en trozos de cincuenta dígitos y los memorizó siguiendo una especie de ritmo.

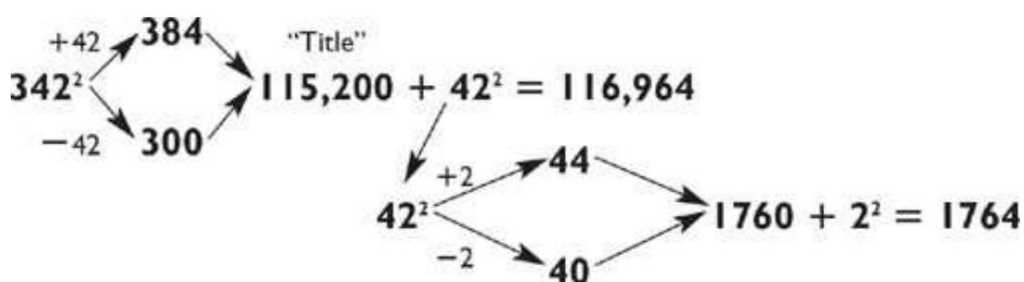
Con impávida confianza, explicó: "Habría sido una hazaña reprobable e inútil si no hubiera sido tan fácil".

Que Aitken pueda memorizar p hasta mil lugares no lo califica como un calculador relámpago. El hecho de que pudiera multiplicar fácilmente números de cinco dígitos entre sí lo demuestra. Un matemático llamado Thomas O'Beirne recordó a Aitken en una demostración de una calculadora de escritorio.

"El vendedor", escribió O'Beirne, "dijo algo como 'Ahora multiplicaremos 23.586 por 71.283'. Aitken dijo inmediatamente: 'Y consigue...' (sea lo que sea). El vendedor estaba demasiado concentrado en vender como para darse cuenta, pero su gerente, que estaba observando, sí lo hizo. Cuando vio que Aitken tenía razón, casi se lo lanza (y yo también)".

Irónicamente, Aitken notó que cuando compró una calculadora de escritorio, sus propias habilidades mentales se deterioraron rápidamente. Anticipando lo que podría deparar el futuro, se lamentó: "Los calculadores mentales pueden, como los de Tasmania o los maoríes, estar condenados a la extinción. Por lo tanto, es posible que sientas un interés casi antropológico al examinar un espécimen curioso, y algunos de mis auditores aquí presentes podrían decir en el año 2000 d.C.: "Sí, conocí uno así". "

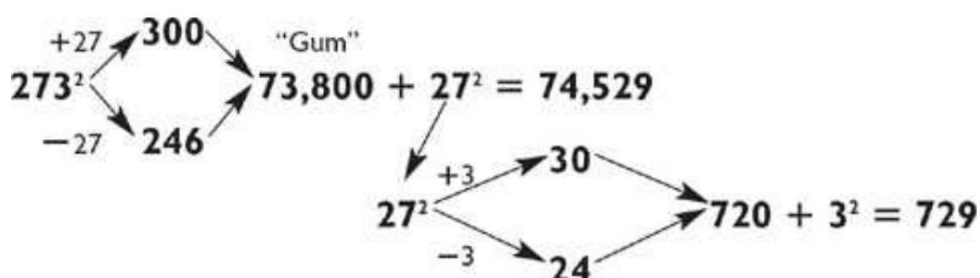
¡Afortunadamente, la historia le ha demostrado que estaba equivocado!



Como recordará del [capítulo 3](#), para elevar al cuadrado 342 primero multiplique 300×384 , lo que da 115 200, luego sume 422. Pero cuando haya calculado $422 = 1764$, es posible que haya olvidado el número anterior, 115 200.

Aquí es donde nuestro sistema de memoria viene al rescate. Para almacenar el número 115,200, coloque 200 en su mano levantando dos dedos y convierta 115 en una palabra como un título. (Por cierto, no considero que guardar los 200 en los dedos sea una trampa. Después de todo, ¿para qué sirven las manos si no para sujetar los dígitos!) Repítete el título de la palabra una o dos veces. Eso es más fácil de recordar que 115,200, especialmente después de comenzar a calcular 422. Una vez que haya llegado a 1,764, puede agregarlo al título 2, o 115,200, para un total de 116,964.

Aquí está otro:



Después de multiplicar $300 \times 246 = 73,800$, convierte 73 en chicle y sostén 800 en tu mano levantando ocho dedos. Una vez que hayas calculado $272 = 729$, simplemente agrégalo a la goma 8, o 73,800, para un total de 74,529. Esto puede parecer un poco engorroso al principio, pero con la práctica la conversión de números a palabras y nuevamente a números se convierte casi en algo natural.

Has visto con qué facilidad se pueden traducir números de dos dígitos a palabras sencillas. No todos los números de tres dígitos se pueden traducir tan fácilmente, pero si no encuentra una palabra simple que actúe como

mnemotécnico, una palabra inusual o una palabra sin sentido servirá. Por ejemplo, si no se le ocurre rápidamente una palabra simple para 286 o 638, use una palabra combinada como no fudge o una palabra sin sentido como jam- o. Incluso estas palabras inusuales deberían ser más fáciles de recordar que 286 o 638 durante un cálculo largo. Para algunos de los enormes problemas del próximo capítulo, estos trucos de memoria serán indispensables.

MAGIA DE LA MEMORIA

Sin utilizar mnemónicos, la memoria humana promedio (incluida la mía) sólo puede contener unos siete u ocho dígitos a la vez. Pero una vez que domines la capacidad de convertir números en palabras, podrás ampliar considerablemente tu capacidad de memoria. Haga que alguien diga lentamente en voz alta dieciséis dígitos mientras otra persona los escribe en una pizarra o en una hoja de papel. Una vez escritos, los repites en el orden exacto en que fueron dados, ¡sin mirar la pizarra o la hoja de papel! En una demostración de conferencia reciente, me dieron la siguiente serie de números:

1, 2, 9, 7, 3, 6, 2, 7, 9, 3, 3, 2, 8, 2, 6, 1

A medida que se pronunciaban los números, utilicé el código fonético para convertirlos en palabras y luego los vinculé con una historia sin sentido. En este caso, 12 se vuelve diminuto, 97 se convierte en libro, 362 se convierte en máquina, 793 se convierte en kaboom, 32 se convierte en luna y 8261 se convierte en acabado.

Mientras se creaban las palabras, las vinculé para formar una historia tonta que me ayudara a recordarlas. Me imaginé encontrando un libro diminuto que coloqué dentro de una máquina. Esto hizo que la máquina explotara y me arrojó a la luna, donde terminé. Esta historia puede parecer extraña, pero cuanto más ridícula sea, más fácil será de recordar y, además, más divertida.

Capítulo 8

El Stu difícil hecho fácil: Multiplicación avanzada

En este punto del libro (si lo ha leído capítulo por capítulo), habrá aprendido a hacer sumas, restas, multiplicaciones y divisiones mentales, así como el arte de la estimación, las matemáticas con lápiz y papel y la Código fonético para la memoria numérica. Este capítulo está dirigido a matemáticos serios y acérrimos que quieren llevar sus mentes hasta los límites del cálculo mental. Los problemas de este capítulo van desde cuadrados de cuatro dígitos hasta el problema más grande que realizo públicamente: la multiplicación de dos números diferentes de cinco dígitos.

Para resolver estos problemas, es particularmente importante que se sienta cómodo y razonablemente rápido utilizando el código fonético. Y aunque, si echamos un vistazo a este capítulo, los problemas parecen abrumadores, permítanme reafirmar las dos premisas fundamentales de este libro: (1) casi cualquier persona puede aprender todas las habilidades de cálculo mental; y (2) la clave es la simplificación de todos los problemas en problemas más fáciles que puedan resolverse rápidamente. No encontrará ningún problema en este capítulo (ni en ningún otro lugar) (comparable a estos) que no pueda dominar y aprender mediante las técnicas de simplificación que ha aprendido en capítulos anteriores.

Debido a que asumimos que usted domina las técnicas necesarias para este capítulo, le enseñaremos principalmente mediante ilustraciones, en lugar de guiarlo a través de los problemas palabra por palabra. Sin embargo, como ayuda, le recordamos que muchos de los problemas más simples incluidos dentro de estos problemas más grandes son los que usted tiene que resolver.

ya hemos visto en capítulos anteriores. Comenzamos con cuadrados de cuatro dígitos. ¡Buena suerte!

CUADRADOS DE CUATRO DÍGITOS

Como habilidad preliminar para dominar los cuadrados de cuatro dígitos, debes poder resolver problemas de 4 por 1. Los dividimos en dos problemas de 2 por 1, como en los ejemplos siguientes:

$$\begin{array}{r}
 4,867 \text{ (4,800 + 67)} \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 9 \times 4,800 = 43,200 \\
 9 \times 67 = + \quad 603 \\
 \hline
 43,803
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2,781 \text{ (2,700 + 81)} \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 4 \times 2,700 = 10,800 \\
 4 \times 81 = + \quad 324 \\
 \hline
 11,124
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6,718 \text{ (6,700 + 18)} \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 8 \times 6,700 = 53,600 \\
 8 \times 18 = + \quad 144 \\
 \hline
 53,744
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4,269 \text{ (4,200 + 69)} \\
 \times \quad 5 \\
 \hline
 5 \times 4,200 = 21,000 \\
 5 \times 69 = + \quad 345 \\
 \hline
 21,345
 \end{array}$$

Una vez que haya dominado el 4 por 1, estará listo para abordar cuadrados de cuatro dígitos. Elevamos al cuadrado 4,267. Usando el mismo método que usamos con cuadrados de dos y tres dígitos, elevaremos al cuadrado el número 4267 redondeando hacia abajo por 267 a 4000 y hacia arriba por 267 a 4534, multiplicando 4534×4000 (un 4 por 1) y luego suma el cuadrado del número por el que subiste y bajaste, o 2672, como se ilustra a continuación:

$$\begin{array}{rcl}
 & +267 & \swarrow \\
 4,267^2 & & 4,534 \\
 & -267 & \searrow \\
 & & 4,000
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \text{"Damage"} \\
 18,136,000 \quad (4,534 \times 4,000) \\
 + \quad 71,289 \quad (267^2) \\
 \hline
 18,207,289
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & +33 & \swarrow \\
 267^2 & & 300 \\
 & -33 & \searrow \\
 & & 234
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 70,200 \quad (300 \times 234) \\
 + \quad 1,089 \quad (33^2) \\
 \hline
 71,289
 \end{array}$$

Ahora bien, obviamente están sucediendo muchas cosas en este problema. Me doy cuenta de que una cosa es decir: "Sólo suma el cuadrado de 267" y otra muy distinta es hacerlo y recordar qué se suponía que debías agregarle. En primer lugar, una vez que multiplicas 4.534×4 para obtener 18.136, puedes decir la primera parte de la respuesta en voz alta: "Dieciocho millones...". Puedes hacerlo porque el número original siempre se redondea al millar más cercano. Por lo tanto, el número de tres dígitos más grande que jamás elevará al cuadrado en el siguiente paso es 500. El cuadrado de 500 es 250 000, por lo que tan pronto como vea que el resto de su respuesta (en este caso, 136 000) es menor que 750 000, Sepa que el dígito de los millones no cambiará.

Una vez que hayas dicho "dieciocho millones...", deberás conservar 136.000 antes de cuadrar 267. ¡Aquí es donde nuestras mnemónicas del último capítulo vienen al rescate! Usando el código fonético, puedes convertir 136 en daño (1 = d, 3 = m, 6 = j). Ahora puedes trabajar en la siguiente parte del problema y simplemente recordar el daño (y que hay tres ceros a continuación; este siempre será el caso). Si en algún momento de los cálculos olvidas cuál es el

El problema original es que puedes echar un vistazo al número original o, si no está escrito, pedirle al público que repita el problema (lo que da la ilusión de que estás empezando el problema desde cero cuando, en realidad, ya lo has hecho). hecho algunos de los cálculos)!

Ahora haces el cuadrado de tres dígitos tal como aprendiste antes, para obtener 71,289. Solía tener problemas para recordar las centenas de mi respuesta (2, en este caso). Lo curé levantando los dedos (dos dedos aquí). Si olvida los dos últimos dígitos (89), puede volver al número original (4267), elevar al cuadrado sus dos últimos dígitos ($67^2 = 4489$) y tomar los dos últimos dígitos de ese.

Para calcular la respuesta final, ahora suma 71.289 al daño (lo que se traduce en 136.000), lo que da como resultado 207.289, que ahora puede decir en voz alta.

Hagamos un cuadrado más de cuatro dígitos: 8,4312:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 +431 \\
 8,431^2 \\
 -431
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 8,862 \\
 \\
 8,000
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{"Foppish"} \\
 70,896,000 \quad (8,862 \times 8,000) \\
 + \quad 185,761 \quad (431^2) \\
 \hline
 71,081,761
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 +31 \\
 431^2 \\
 -31
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 462 \\
 \\
 400
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 184,800 \quad (462 \times 400) \\
 + \quad 961 \quad (31^2) \\
 \hline
 185,761
 \end{array}
 \end{array}$$

Sin repetir todos los pasos detallados como hicimos en el problema anterior, señalaré algunos de los aspectos más destacados de este problema. Después de hacer $8 \times 8,862 = 70,896$, tenga en cuenta que 896 está por encima de 750, por lo que es posible un acarreo. De hecho, dado que 4312 es mayor que $4002 = 160\,000$, definitivamente habrá un acarreo cuando hagas la suma al número 896 000. Por lo tanto, en este momento podemos decir con seguridad en voz alta: "Setenta y un millones...".

Cuando elevas al cuadrado 431, obtienes 185,761. Suma 185 al 896 para obtener 1081 y di el resto de la respuesta. Pero recuerda que tú

ya anticipó el acarreo, así que simplemente diga: "... 81 mil... 761". ¡Ya terminaste!

Ilustramos un punto ne más con 2,7532:

$$\begin{array}{rcl}
 & +247 & \text{3,000} \\
 2,753^2 & & \swarrow \quad \searrow \\
 & -247 & \text{2,506}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \text{"Light off"} \\
 \text{7,518,000} \quad (3,000 \times 2,506) \\
 + \quad \text{61,009} \quad (247^2) \\
 \hline
 \text{7,579,009}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & +47 & \text{294} \\
 247^2 & & \swarrow \quad \searrow \\
 & -47 & \text{200}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \text{58,800} \quad (294 \times 200) \\
 + \quad \text{2,209} \quad (47^2) \\
 \hline
 \text{61,009}
 \end{array}$$

Como estás redondeando a 3000, multiplicarás 3000 por otro número entre 2000. Podrías restar $2753 - 247 = 2506$, pero eso es un poco complicado. Para obtener los últimos tres dígitos, duplique 753 para obtener 1506. Los últimos tres dígitos de este número, 506, son los últimos tres dígitos del número 2000: ¡2506! Esto funciona porque los dos números que se multiplican deben sumar el doble del número original.

Luego proceda de la forma habitual de multiplicar $3.000 \times 2.506 = 7.518.000$, convierta 518 a las palabras luz o y diga la primera parte de la respuesta en voz alta como "Siete millones...". Puede decir esto con confianza ya que 518 está por debajo de 750. entonces no habrá acarreo.

Thomas Fuller: hombres eruditos y grandes tontos

I
 Sería difícil superar la desventaja física para el aprendizaje que experimentó Helen Keller, aunque la desventaja social impuesta a Thomas Fuller, nacido en África en 1710, se acerca. No sólo era analfabeto; se vio obligado a trabajar en los campos de Virginia como esclavo y nunca recibió un solo día de educación.

La "propiedad" de la señora Elizabeth Cox, Thomas Fuller

aprendió por sí mismo a contar hasta 100, después de lo cual aumentó sus poderes numéricos contando elementos que tenía a mano como los granos en un fanega de trigo, las semillas en un fanega de hacha y el número de pelos en la cola de una vaca (2.872).

Extrapolando a partir del simple conteo, Fuller aprendió a calcular la cantidad de tejas que una casa necesitaría para cubrir su techo, la cantidad de postes necesarios para encerrarla y otras cifras relevantes para los materiales necesarios en la construcción. Sus prodigiosas habilidades crecieron y con ellas su reputación. En su vejez, dos habitantes de Pensilvania lo desafiaron a calcular mentalmente números que desafiarían a las mejores calculadoras de rayos. Por ejemplo, preguntaron:

"Supongamos que un granjero tiene seis cerdas, y cada cerda tiene seis cerdas el primer año, y todas aumentan en la misma proporción, hasta el final de ocho años, ¿cuántas cerdas tendrá entonces el granjero? " El problema se puede escribir como 78×6 , es decir, $(7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) \times 6$. En diez minutos, Fuller dio su respuesta de 34.588.806, la respuesta correcta.

Tras la muerte de Fuller en 1790, el Columbian Centinel informó que "podía dar el número de postes, yardas, pies, pulgadas y granos de cebada en cualquier distancia dada, digamos el diámetro de la órbita de la Tierra; y en cada cálculo produciría la respuesta verdadera, en menos tiempo del que tardarían noventa y nueve hombres de cada cien con sus plumas. Cuando se le preguntó a Fuller si se arrepentía de no haber recibido nunca una educación tradicional, respondió: "No, Massa; es mejor que no haya aprendido nada: porque muchos hombres eruditos son grandes tontos".

Luego, sumas el cuadrado de 247. No olvides que puedes derivar 247 rápidamente como complemento de 753. Luego procede a la respuesta final como lo hiciste en los problemas anteriores de cuatro dígitos.

EXERCISE: FOUR-DIGIT SQUARES

1. **1234^2**

2. **8639^2**

3. **5312^2**

4. **9863^2**

5. **3618^2**

6. **2971^2**

MULTIPLICACIÓN 3 POR 2

Vimos en los problemas de multiplicación 2 por 2 que hay varias formas diferentes de abordar el mismo problema. La variedad de métodos aumenta cuando aumenta el número de dígitos del problema. En la multiplicación de 3 por 2, encuentro que vale la pena tomarse unos momentos para analizar el problema y determinar el método de cálculo que supondrá la menor tensión para el cerebro.

Métodos de factorización

Los problemas de 3 por 2 más fáciles de calcular son aquellos en los que el número de dos dígitos es factorizable.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 637 \\ \times 56 \quad (8 \times 7) \end{array}$$

$$637 \times 56 = 637 \times 8 \times 7 = 5,096 \times 7 = 35,672$$

Son geniales porque no tienes que agregar nada. Simplemente factorizas 56 en 8×7 , luego haces un 3 por 1 ($637 \times 8 = 5096$) y finalmente un 4 por 1 ($5096 \times 7 = 35672$). No hay pasos adicionales y no es necesario almacenar ningún resultado parcial.

Más de la mitad de todos los números de dos dígitos se pueden factorizar en números 11 e inferiores, por lo que podrás utilizar este método para muchos problemas. He aquí un ejemplo:

$$\begin{array}{r} 853 \\ \times 44 \text{ (11} \times 4\text{)} \\ \hline \end{array}$$

$$853 \times 11 \times 4 = 9,383 \times 4 = 37,532$$

Para multiplicar 853×11 , tratas 853 como $850 + 3$ y procedes de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 850 \times 11 = 9,350 \\ 3 \times 11 = + 33 \\ \hline 9,383 \end{array}$$

Ahora multiplica $9,383 \times 4$ tratando 9,383 como $9,300 + 83$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 9,300 \times 4 = 37,200 \\ 83 \times 4 = + 332 \\ \hline 37,532 \end{array}$$

Si el número de dos dígitos no se puede factorizar en números pequeños, Examine el número de tres dígitos para ver si se puede factorizar:

$$\begin{array}{r} 144 \text{ (6} \times 6 \times 4\text{)} \\ \times 76 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 76 \times 144 &= 76 \times 6 \times 6 \times 4 = 456 \times 6 \times 4 \\ &= 2,736 \times 4 = 10,944 \end{aligned}$$

Observe que la secuencia de los problemas de multiplicación es 2 por 1, 3 por 1 y finalmente 4 por 1. Dado que todos estos son problemas que ahora puede resolver con considerable facilidad, este tipo de problema de 3 por 2 no debería ser ningún problema.

Aquí hay otro ejemplo en el que el número de dos dígitos no es factorizable pero el número de tres dígitos sí lo es:

$$\begin{array}{r} 462 (11 \times 7 \times 6) \\ \times 53 \\ \hline \end{array}$$

$$53 \times 11 \times 7 \times 6 = 583 \times 7 \times 6 = 4,081 \times 6 = 24,486$$

Aquí la secuencia es de 2 por 2, de 3 por 1 y de 4 por 1, aunque cuando el número de tres dígitos se factoriza por 11, puedes usar el método de los once para obtener un 2 muy simple. por-2 ($53 \times 11 = 583$). En este caso, vale la pena poder reconocer cuándo un número es divisible por 11, como se describe en el [Capítulo 4](#).

Si el número de dos dígitos no se puede factorizar y el número de tres dígitos se puede factorizar sólo en un 2 por 1, el problema aún se puede resolver fácilmente con un 2 por 2, seguido de un 4 por 1. :

$$\begin{array}{r} 423 (47 \times 9) \\ \times 83 \\ \hline \end{array}$$

$$83 \times 47 \times 9 = 3,901 \times 9 = 35,109$$

Aquí debes ver que 423 es divisible por 9, planteando el problema como $83 \times 47 \times 9$. Este 2 por 2 no es tan fácil, pero al tratar 83 como $80 + 3$, obtienes:

$$\begin{array}{r} 83 (80 + 3) \\ \times 47 \\ \hline 80 \times 47 = 3,760 \\ 3 \times 47 = + 141 \\ \hline 3,901 \end{array}$$

Luego haz el problema 4 por 1 de 3901×9 para obtener tu respuesta final de 35,109.

El método de la suma

Si el número de dos dígitos y el número de tres dígitos no se pueden factorizar convenientemente en el problema de 3 por 2 que estás haciendo, siempre puedes recurrir al método de la suma:

$$\begin{array}{r}
 721 \text{ (720 + 1)} \\
 \times \quad 37 \\
 \hline
 720 \times 37 = 26,640 \text{ (treating 72 as } 9 \times 8) \\
 1 \times 37 = + \quad 37 \\
 \hline
 26,677
 \end{array}$$

El método requiere que agregues 2 por 2 (multiplicado por 10) a 2 por 1. Estos problemas tienden a ser más difíciles que los problemas que se pueden factorizar, ya que hay que realizar una operación de 2 por 1 manteniendo un número de cinco dígitos y luego sumar los resultados. De hecho, probablemente sea más fácil resolver este problema factorizando 721 en 103×7 y luego calculando $37 \times 103 \times 7 = 3,811 \times 7 = 26,677$.

Aquí hay otro ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 732 \text{ (730 + 2)} \\
 \times \quad 57 \\
 \hline
 730 \times 57 = 41,610 \text{ (treating 73 as } 70 + 3) \\
 2 \times 57 = + \quad 114 \\
 \hline
 41,724
 \end{array}$$

Aunque normalmente dividirás el número de tres dígitos cuando uses el método de suma, ocasionalmente vale la pena dividir el número de dos dígitos, particularmente cuando el último dígito del número de dos dígitos es un 1 o un 2, como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 386 \\
 \times \quad 51 \text{ (50 + 1)} \\
 \hline
 50 \times 386 = 19,300 \\
 1 \times 386 = + \quad 386 \\
 \hline
 19,686
 \end{array}$$

Esto reduce el 3 por 2 a un 3 por 1, lo que resulta especialmente fácil ya que el segundo problema de multiplicación involucra un 1. Tenga en cuenta también que nos ayudaron a multiplicar un 5 por un número par, lo que produce un 0 extra. en la respuesta, por lo que solo hay un dígito de superposición en el problema de suma.

Otro ejemplo de multiplicación de un 5 por un número par se ilustra en el siguiente problema:

$$\begin{array}{r}
 835 \\
 \times \quad 62 \text{ (} 60 + 2 \text{)} \\
 \hline
 60 \times 835 = 50,100 \\
 2 \times 835 = + 1,670 \\
 \hline
 51,770
 \end{array}$$

Cuando multiplicas el 6 en 60 por el 5 en 835, genera un 0 adicional en la respuesta, lo que hace que el problema de suma sea especialmente fácil.

El método de la resta

Al igual que con los de 2 por 2, a veces es más conveniente resolver un 3 por 2 con resta en lugar de suma, como en los siguientes problemas:

$$\begin{array}{r}
 629 \text{ (} 630 - 1 \text{)} \\
 \times \quad 38 \\
 \hline
 630 \times 38 = 23,940 \text{ (} 63 = 9 \times 7 \text{)} \\
 -1 \times 38 = - \quad 38 \\
 \hline
 23,902
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 758 \text{ (} 760 - 2 \text{)} \\
 \times \quad 43 \\
 \hline
 760 \times 43 = 32,680 \text{ (} 43 = 40 + 3 \text{)} \\
 -2 \times 43 = - \quad 86 \\
 \hline
 32,594
 \end{array}$$

Por el contrario, puedes comparar el último método de resta con el método de suma, a continuación, para este mismo problema:

$$\begin{array}{r}
 758 \text{ (750 + 8)} \\
 \times \quad 43 \\
 \hline
 750 \times 43 = 32,250 \text{ (75 = 5 \times 5 \times 3)} \\
 8 \times 43 = + \quad 344 \\
 \hline
 32,594
 \end{array}$$

Mi preferencia para abordar este problema sería utilizar el método de resta porque siempre trato de dejarme con el problema de suma o resta más fácil posible al final. En este caso, prefiero restar 86 que sumar 344, aunque el problema de multiplicación 2 por 2 en el método de resta anterior es un poco más difícil que el del método de suma.

El método de resta también se puede utilizar para números de tres dígitos inferiores a un múltiplo de 100 o cercanos a 1000, como en los dos ejemplos siguientes:

$$\begin{array}{r}
 293 \text{ (300 - 7)} \\
 \times \quad 87 \\
 \hline
 300 \times 87 = 26,100 \\
 -7 \times 87 = - \quad 609 \\
 \hline
 25,491
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 988 \text{ (1000 - 12)} \\
 \times \quad 68 \\
 \hline
 1,000 \times 68 = 68,000 \\
 -12 \times 68 = - \quad 816 \text{ (12 = 6 \times 2)} \\
 \hline
 67,184
 \end{array}$$

Los últimos tres dígitos de las respuestas se obtuvieron tomando el complementos de $609 - 100 = 509$ y 816 , respectivamente.

Finalmente, en la siguiente ilustración dividimos el número de dos dígitos usando el método de resta. Observa cómo restamos 736 restando 1000 y sumando nuevamente el complemento:

736	44,160	
× 59 (60 - 1)	- 1,000	
60 × 736 = 44,160	43,160	
- 1 × 736 = - 736	+ 264	(complement of 736)
43,424	43,424	

**3-BY-2 EXERCISES USING FACTORING, ADDITION,
AND SUBTRACTION METHODS**

Resuelve los siguientes problemas de 3 por 2 usando el método de factorización, suma o resta. Cuando es posible, factorizar suele ser más fácil. Las soluciones aparecen al final del libro.

1. $\begin{array}{r} 858 \\ \times 15 \\ \hline \end{array}$	2. $\begin{array}{r} 796 \\ \times 19 \\ \hline \end{array}$	3. $\begin{array}{r} 148 \\ \times 62 \\ \hline \end{array}$	4. $\begin{array}{r} 773 \\ \times 42 \\ \hline \end{array}$
--	--	--	--

5. $\begin{array}{r} 906 \\ \times 46 \\ \hline \end{array}$	6. $\begin{array}{r} 952 \\ \times 26 \\ \hline \end{array}$	7. $\begin{array}{r} 411 \\ \times 93 \\ \hline \end{array}$	8. $\begin{array}{r} 967 \\ \times 51 \\ \hline \end{array}$
--	--	--	--

9. $\begin{array}{r} 484 \\ \times 75 \\ \hline \end{array}$	10. $\begin{array}{r} 126 \\ \times 87 \\ \hline \end{array}$	11. $\begin{array}{r} 157 \\ \times 33 \\ \hline \end{array}$	12. $\begin{array}{r} 616 \\ \times 37 \\ \hline \end{array}$
--	---	---	---

13. $\begin{array}{r} 841 \\ \times 72 \\ \hline \end{array}$	14. $\begin{array}{r} 361 \\ \times 41 \\ \hline \end{array}$	15. $\begin{array}{r} 218 \\ \times 68 \\ \hline \end{array}$	16. $\begin{array}{r} 538 \\ \times 53 \\ \hline \end{array}$
---	---	---	---

17. $\begin{array}{r} 817 \\ \times 61 \\ \hline \end{array}$	18. $\begin{array}{r} 668 \\ \times 63 \\ \hline \end{array}$	19. $\begin{array}{r} 499 \\ \times 25 \\ \hline \end{array}$	20. $\begin{array}{r} 144 \\ \times 56 \\ \hline \end{array}$
---	---	---	---

21. $\begin{array}{r} 281 \\ \times 44 \\ \hline \end{array}$	22. $\begin{array}{r} 988 \\ \times 22 \\ \hline \end{array}$	23. $\begin{array}{r} 383 \\ \times 49 \\ \hline \end{array}$
---	---	---

Los siguientes 3 por 2 aparecerán en los cuadrados de cinco dígitos y en el Problemas de multiplicación de 5 por 5 que siguen.

24. $\begin{array}{r} 589 \\ \times 87 \\ \hline \end{array}$	25. $\begin{array}{r} 286 \\ \times 64 \\ \hline \end{array}$	26. $\begin{array}{r} 853 \\ \times 32 \\ \hline \end{array}$	27. $\begin{array}{r} 878 \\ \times 24 \\ \hline \end{array}$
---	---	---	---

28. $\begin{array}{r} 423 \\ \times 45 \\ \hline \end{array}$	29. $\begin{array}{r} 154 \\ \times 19 \\ \hline \end{array}$	30. $\begin{array}{r} 834 \\ \times 34 \\ \hline \end{array}$	31. $\begin{array}{r} 545 \\ \times 27 \\ \hline \end{array}$
---	---	---	---

32. $\begin{array}{r} 653 \\ \times 69 \\ \hline \end{array}$	33. $\begin{array}{r} 216 \\ \times 78 \\ \hline \end{array}$	34. $\begin{array}{r} 822 \\ \times 95 \\ \hline \end{array}$
---	---	---

CUADRADOS DE CINCO DÍGITOS

Dominar la multiplicación de 3 por 2 requiere bastante práctica, pero una vez que lo hayas logrado, puedes pasar directamente a hacer cuadrados de cinco dígitos porque se simplifican en un problema de 3 por 2 más un cuadrado de dos dígitos y un cuadrado de tres dígitos. Mira: Para elevar al cuadrado el siguiente número:

$$46,7922$$

Trátelo como:

$$\begin{array}{r} 46,000 + 792 \\ \times 46,000 + 792 \\ \hline \end{array}$$

Usando la ley distributiva podemos descomponerlo en:

$$\begin{array}{ccc} 1. & 2. & 3. \\ 46,000 \times 46,000 + 2(46,000)(792) + 792 \times 792 \end{array}$$

Esto se puede expresar de manera más simple como:

$$4622 \text{ 1 millón} + (46)(792)(2000) + 79222$$

Pero no los hago en este orden. De hecho, empiezo por el medio, porque los problemas de 3 por 2 son más difíciles que los cuadrados de dos y tres dígitos. Entonces, de acuerdo con el principio de quitar primero las cosas difíciles, hago $792 \times 46 \times 2$ y adjunto tres ceros al final, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 792 (800 - 8) \\ \times 46 \\ \hline 800 \times 46 = 36,800 \\ -8 \times 46 = -368 \\ \hline 36,432 \times 2,000 = 72,864,000 \end{array} \quad \text{"Fisher"}$$

Usando el método de resta, como se muestra arriba, calcula $792 \times 46 = 36,432$, luego duplica ese número para obtener 72,864. Usar el código fonético del último capítulo sobre el número 864 le permite almacenar este número como 72 Fisher.

El siguiente paso es hacer 462×1 millón, que es 2.116.000.000.

En este punto, puedes decir: "Dos mil millones..."

Recordando los 72 de 72 de Fisher, sumas 116 millones para obtener 188 millones. Antes de decir este número en voz alta, debe verificar con anticipación si hay un acarreo al sumar Fisher, o 864, a 7922. Aquí en realidad no se calcula 7922; más bien, determina que su producto será lo suficientemente grande como para que los 864.000 se lleven. (Puedes estimar esto observando que 8002 es 640 000, lo que fácilmente hará que 864 000 se lleven, por lo que elevas el 188 un nivel y dices: "... 189 millones...")

Aún aferrándote a Fisher, calcula el cuadrado de 792, usando el método del cuadrado de tres dígitos (redondeando hacia arriba y hacia abajo por 8, y así sucesivamente) para obtener 627,264. Finalmente, suma 627 a Fisher, u 864, para obtener 1491. Pero como ya hiciste el acarreo, suelta el 1 y di: "... 491 mil 264".

A veces olvido los últimos tres dígitos de la respuesta porque mi mente ha estado muy preocupada con cálculos más importantes. Entonces, antes de hacer la suma final, guardaré el 2 de 264 en mis dedos e intentaré recordar el 64, lo cual normalmente puedo hacer porque tendemos a recordar las cosas más recientes que escuchamos. Si esto falla, puedo obtener los dos últimos dígitos elevando al cuadrado los dos últimos dígitos del número original, 922 u 8,464, cuyos dos últimos dígitos son los dos últimos dígitos que estoy buscando: 64. (Alternativamente, puedes convertir 264 en una palabra como naturaleza).

Sé que esto es bastante complicado. Para reiterar todo el problema en una sola ilustración, así es como calculé 46,7922:

$$\begin{array}{r}
 792 (800 - 8) \\
 \times \quad 46 \\
 \hline
 800 \times 46 = 36,800 \\
 -8 \times 46 = -368 \\
 \hline
 36,432 \times 2,000 = 72,864,000
 \end{array}$$

"Fisher"

$$\begin{array}{r}
 72,864,000 \\
 46,000^2 = + 2,116,000,000 \\
 \hline
 2,188,864,000 \\
 792^2 = + \quad 627,264 \\
 \hline
 2,189,491,264
 \end{array}$$

$\begin{array}{r}
 +8 \swarrow 800 \\
 792^2 \quad \quad \quad 627,200 \\
 -8 \searrow 784 \\
 \quad \quad \quad + \quad 64 \quad (8^2) \\
 \hline
 627,264
 \end{array}$

Veamos otro ejemplo de cuadrado de cinco dígitos:

$$83,5222$$

Como antes, calculamos la respuesta en este orden:

$$83 \times 522 \times 2000, 832 \times 1 \text{ millón, luego } 5222$$

Para el primer problema, observe que 522 es múltiplo de 9. De hecho, $522 = 58 \times 9$. Tratando 83 como $80 + 3$, obtenemos:

$$\begin{array}{r}
 522 (58 \times 9) \\
 \times \quad 83 \\
 \hline
 83 \times 58 \times 9 = 4,814 \times 9 = 43,326
 \end{array}$$

Duplicar 43,326 da como resultado 86,652, que se pueden almacenar como 86 Julian. Como $832 = 6.889$, podemos decir: "Seis mil millones..."

Sumar $889 + 86$ nos da 975. Antes de decir 975 millones, verificamos si Julian (652 000) provocará un acarreo después de elevar al cuadrado 522. Al estimar 5222 como aproximadamente 270 000 (500×540), verá que no se llevará. Por lo tanto, se puede decir con seguridad: "... 975 millones..."

Finalmente, eleva al cuadrado 522 de la forma habitual para obtener 272,484 y suma eso a Julián (652.000) para el resto de la respuesta: "... 924.484".

Ilustrado, este problema se ve así:

$$83,522^2$$

$$\begin{array}{r} 522 \\ \times 83 \\ \hline \end{array}$$

$$83 \times 58 \times 9 = 4,814 \times 9 = 43,326$$

"Julian"

$$\begin{array}{r} 43,326 \times 2,000 = 86,652,000 \\ 83,000^2 = + 6,889,000,000 \\ \hline 6,975,652,000 \\ 522^2 = + 272,484 \\ \hline 6,975,924,484 \end{array}$$

$\begin{array}{r} +22 \swarrow 544 \searrow 272,000 \\ 522^2 \swarrow \quad \searrow + 484 \quad (22^2) \\ -22 \swarrow 500 \searrow 272,484 \end{array}$

EXERCISE: FIVE-DIGIT SQUARES

1. $45,795^2$

2. $21,231^2$

3. $58,324^2$

4. $62,457^2$

5. $89,854^2$

6. $76,934^2$

MULTIPLICACIÓN 3 POR 3

Para llegar al gran objetivo de la multiplicación de 5 por 5, la multiplicación de 3 por 3 es el último obstáculo. Al igual que con los 3 por 2, existe una variedad de métodos que puede utilizar para explotar los números en el proceso de simplificación.

Método de factorización

Comenzaremos con el método de factorización. Desafortunadamente, la mayoría de los números de tres dígitos no se pueden factorizar en números de un dígito, pero cuando sí lo son, el cálculo no es tan malo.

$$\begin{array}{r} 829 \\ \times 288 \quad (9 \times 8 \times 4) \\ \hline \end{array}$$

$$829 \times 9 \times 8 \times 4 = 7,461 \times 8 \times 4 = 59,688 \times 4 = 238,752$$

Observe la secuencia involucrada. Simplificas el 3 por 3 (829×288) a 3 por 1 por 1 por 1 factorizando 288 en $9 \times 8 \times 4$. Esto luego se convierte en un 4 por 1. -por-1 ($7,461 \times 8 \times 4$), y finalmente en 5 por 1 para obtener la respuesta final de 238,752. La belleza de este proceso es que no hay nada que agregar ni nada que almacenar en la memoria. Cuando llegas al 5 por 1, estás a un paso de completarlo.

El problema de 5 por 1 se puede resolver en dos pasos tratando 59,688 como $59,000 + 688$, luego sumando los resultados del 2 por 1 ($59,000 \times 4$) y el 3 por 1 (688×4), como a continuación:

$$\begin{array}{r} 59,688 \quad (59,000 + 688) \\ \times \quad 4 \\ \hline 59,000 \times 4 = 236,000 \\ 688 \times 4 = + 2,752 \\ \hline 238,752 \end{array}$$

Si ambos números de tres dígitos se pueden factorizar en 2 por 1, entonces el 3 por 3 se puede simplificar a 2 por 2 por 1 por 1, como en el siguiente problema:

$$\begin{array}{r} 513 \quad (57 \times 9) \\ \times 246 \quad (41 \times 6) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 57 \times 41 \times 9 \times 6 &= 2,337 \times 9 \times 6 \\ &= 21,033 \times 6 \\ &= 126,198 \end{aligned}$$

Como siempre, es mejor resolver primero la parte difícil del problema (el 2 por 2). Una vez que tenga esto, el problema se reduce a 4 por 1 y luego a 5 por 1.

La mayoría de las veces, sólo uno de los números de tres dígitos será factorizable, en cuyo caso se reduce a 3 por 2 por 1, como en el siguiente problema:

$$\begin{array}{r} 459 (51 \times 9) \\ \times 526 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 526 \times 459 &= 526 \times 51 \times 9 \\ &= 526 \times (50 + 1) \times 9 \\ &= 26,826 \times 9 \\ &= 241,434 \end{aligned}$$

El siguiente 3 por 3 es en realidad solo un 3 por 2 disfrazado:

$$\begin{array}{r} 624 \\ \times 435 \end{array}$$

Duplicando 435 y cortando 624 a la mitad, obtenemos el problema equivalente:

$$\begin{array}{r} 312 (52 \times 6) \\ \times 870 (87 \times 10) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 87 \times 52 \times 6 \times 10 &= 87 \times (50 + 2) \times 6 \times 10 \\ &= 4,524 \times 6 \times 10 \\ &= 27,144 \times 10 \\ &= 271,440 \end{aligned}$$

Método cercano

¿Estás listo para algo más fácil? El siguiente atajo de multiplicación, que presentamos en [el Capítulo 0](#), se basa en la

siguiente fórmula algebraica:

$$(x + a)(z + b) = z^2 + za + zb + ab$$

Que reescribimos como:

$$(x + a)(z + b) = z(z + a + b) + ab$$

Esta fórmula es válida para cualquier valor de z , a y b . Aprovecharemos esto siempre que los números de tres dígitos que se van a multiplicar $(z + a)$ y $(z + b)$ estén ambos cerca de un número fácil z (normalmente uno con muchos ceros). Por ejemplo, para multiplicar:

$$\begin{array}{r} 107 \\ \times 111 \\ \hline \end{array}$$

Tratamos este problema como $(100 + 7)(100 + 11)$.

Usando $z = 100$, $a = 7$, $b = 11$, nuestra fórmula nos da:

$$100(100 + 7 + 11) + 7 \times 11 = 100 \times 118 + 77 = 11,877$$

Diagramo el problema de esta manera:

$$\begin{array}{r} 107 (7) \\ \times 111 (11) \\ \hline 100 \times 118 = 11,800 \\ 7 \times 11 = + 77 \\ \hline 11,877 \end{array}$$

Los números entre paréntesis denotan la diferencia entre el número y nuestro conveniente "número base" (aquí, $z = 100$). El número 118 se puede obtener sumando $107 + 11$ o $111 + 7$. Algebraicamente estas sumas son siempre iguales ya que $(z + a) + b = (z + b) + a$.

Esta vez con menos palabras, aquí hay otro rapidito:

$$\begin{array}{r}
 109 \text{ (9)} \\
 \times 104 \text{ (4)} \\
 \hline
 100 \times 113 = 11,300 \\
 9 \times 4 = + \quad 36 \\
 \hline
 11,336
 \end{array}$$

¡Limpio!

Subamos un poco la apuesta con un número base más alto:

$$\begin{array}{r}
 408 \text{ (8)} \\
 \times 409 \text{ (9)} \\
 \hline
 400 \times 417 = 166,800 \\
 8 \times 9 = + \quad 72 \\
 \hline
 166,872
 \end{array}$$

Aunque este método se usa generalmente para multiplicaciones de tres dígitos, también podemos usarlo para multiplicaciones de 2 por 2:

$$\begin{array}{r}
 78 \text{ (8)} \\
 \times 73 \text{ (3)} \\
 \hline
 70 \times 81 = 5,670 \\
 8 \times 3 = + \quad 24 \\
 \hline
 5,694
 \end{array}$$

Aquí, el número base es 70, que multiplicamos por 81 (78 + 3). Incluso el componente de suma suele ser muy sencillo.

También podemos aplicar este método cuando los dos números son menores que el número base, como en el siguiente problema donde ambos números están justo por debajo de 400:

$$\begin{array}{r}
 396 (-4) \\
 \times 387 (-13) \\
 \hline
 400 \times 383 = 153,200 \\
 -4 \times -13 = + 52 \\
 \hline
 153,252
 \end{array}$$

El número 383 se puede obtener de $396 - 13$ o de $387 - 4$. Yo usaría este método para problemas de 2 por 2 como los siguientes:

$$\begin{array}{r}
 97 (-3) \\
 \times 94 (-6) \\
 \hline
 100 \times 91 = 9,100 \\
 -3 \times -6 = + 18 \\
 \hline
 9,118
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 79 (-1) \\
 \times 78 (-2) \\
 \hline
 80 \times 77 = 6,160 \\
 -1 \times -2 = + 2 \\
 \hline
 6,162
 \end{array}$$

En nuestro siguiente ejemplo, el número base se encuentra entre los dos números:

$$\begin{array}{r}
 396 (-4) \\
 \times 413 (13) \\
 \hline
 400 \times 409 = 163,600 \\
 -4 \times 13 = - 52 \\
 \hline
 163,548
 \end{array}$$

El número 409 se obtiene de $396 + 13$, o $413 - 4$. Observa que como -4 y 13 son de signos opuestos, aquí debemos restar 52.

Subamos la apuesta aún más, hasta donde el segundo paso requiere una multiplicación de 2 por 2:

$$\begin{array}{r}
 621 \text{ (21)} \\
 \times 637 \text{ (37)} \\
 \hline
 600 \times 658 = 394,800 \\
 21 \times 37 = + 777 \text{ (37} \times 7 \times 3) \\
 \hline
 395,577
 \end{array}$$

Observamos aquí que el paso 1 del problema de multiplicación (600×658) es en sí mismo una estimación razonable. Nuestro método le permite pasar de una estimación a la respuesta exacta.

$$\begin{array}{r}
 876 \text{ (-24)} \\
 \times 853 \text{ (-47)} \\
 \hline
 900 \times 829 = 746,100 \\
 -24 \times -47 = + 1,128 \text{ (47} \times 6 \times 4) \\
 \hline
 747,228
 \end{array}$$

También observa que en todos estos ejemplos, los números que multiplicamos en el primer paso tienen la misma suma que los números originales. Por ejemplo, en el problema anterior, $900 + 829 = 1729$ así como $876 + 853 = 1729$. Esto se debe a que:

$$x + [(x + a) + b] = (x + a) + (x + b)$$

Por lo tanto, para obtener el número que se multiplicará por 900 (que sabes que será 800 más algo), solo necesitas mirar los dos últimos dígitos de $76 + 53 = 129$ para determinar 829.

En el siguiente problema, sumar $827 + 761 = 1588$ nos dice que simplemente debemos multiplicar 800×788 y luego restar 27×39 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 827 (+27) \\
 \times 761 (-39) \\
 \hline
 800 \times 788 = 630,400 \\
 -39 \times 27 = -1,053 (39 \times 9 \times 3) \\
 \hline
 629,347
 \end{array}$$

Este método es tan efectivo que si el problema de 3 por 3 que te presentan tiene números que no están muy juntos, a veces puedes modificar el problema dividiendo uno y multiplicando el otro, ambos por el mismo número, para acercarlos. juntos. Por ejemplo, 672×157 se puede resolver mediante:

$$\begin{array}{r}
 672 \div 2 = 336 (36) \\
 \times 157 \times 2 = \times 314 (14) \\
 \hline
 300 \times 350 = 105,000 \\
 36 \times 14 = + 504 (36 \times 7 \times 2) \\
 \hline
 105,504
 \end{array}$$

Cuando los números que se multiplican son iguales (¡no puedes acercarte más que eso!), observa que el método de aproximación produce exactamente los mismos cálculos que hiciste en nuestro procedimiento tradicional de elevar al cuadrado:

$$\begin{array}{r}
 347 (47) \\
 \times 347 (47) \\
 \hline
 300 \times 394 = 118,200 \\
 47^2 = + 2,209 \\
 \hline
 120,409
 \end{array}$$

Método de suma

Cuando ninguno de los métodos anteriores funciona, busco la posibilidad del método de suma, particularmente cuando los primeros dos dígitos de uno de

Es fácil trabajar con los números de tres dígitos. Por ejemplo, en el siguiente problema, 64 de 641 se puede factorizar en 8×8 , por lo que resolvería el problema como se ilustra:

$$\begin{array}{r}
 373 \\
 \times \quad 641 \text{ (640 + 1)} \\
 \hline
 640 \times 373 = 238,720 \text{ (373} \times 8 \times 8 \times 10) \\
 1 \times 373 = + \quad 373 \\
 \hline
 239,093
 \end{array}$$

De manera similar, en el siguiente problema, 42 de 427 se puede factorizar en 7×6 , por lo que puedes usar el método de la suma y tratar 427 como $420 + 7$:

$$\begin{array}{r}
 656 \\
 \times \quad 427 \text{ (420 + 7)} \\
 \hline
 420 \times 656 = 275,520 \text{ (656} \times 7 \times 6 \times 10) \\
 7 \times 656 = + \quad 4,592 \\
 \hline
 280,112
 \end{array}$$

A menudo divido el último problema de suma en dos pasos, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 275,520 \\
 7 \times 600 = + \quad 4,200 \\
 \hline
 279,720 \\
 7 \times 56 = + \quad 392 \\
 \hline
 280,112
 \end{array}$$

Dado que los problemas del método de la suma pueden ser muy arduos, normalmente hago todo lo posible para encontrar un método que produzca un cálculo simple al final. Por ejemplo, el problema anterior se podría haber resuelto utilizando el método de factorización. De hecho, así es como elegiría hacerlo:

$$\begin{array}{r} 656 \\ \times 427 (61 \times 7) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 656 \times 61 \times 7 &= 656 \times (60 + 1) \times 7 \\ &= 40,016 \times 7 \\ &= 280,112 \end{aligned}$$

Los problemas más simples del método de la suma son aquellos en los que un número tiene un 0 en el medio, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} 732 \\ \times 308 (300 + 8) \\ \hline 300 \times 732 = 219,600 \\ 8 \times 732 = + 5,856 \\ \hline 225,456 \end{array}$$

Estos problemas tienden a ser mucho más fáciles que otros problemas del método de suma, por lo que vale la pena ver si el problema de 3 por 3 se puede convertir en un problema como este. Por ejemplo, 732×308 se podría haber obtenido mediante cualquiera de los siguientes problemas "distintos de cero":

$$\begin{array}{l} 244 \times 3 = 732 \\ \times 924 \div 3 = \times 308 \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{l} 366 \times 2 = 732 \\ \times 616 \div 2 = \times 308 \end{array}$$

Mencionamos que otra forma de resolver este problema es con $308 \times 366 \times 2$, y aprovechar la cercanía de 308 y 366. Hagamos una tarea más difícil:

$$\begin{array}{r}
 739 \\
 \times 443 \text{ (} 440 + 3 \text{)} \\
 \hline
 440 \times 739 = 325,160 \text{ (} 739 \times 11 \times 4 \times 10 \text{)} \\
 3 \times 700 = + 2,100 \\
 \hline
 327,260 \\
 3 \times 39 = + 117 \\
 \hline
 327,377
 \end{array}$$

Método de resta

El método de resta es uno que utilizo a veces cuando uno de los números de tres dígitos se puede redondear a un número conveniente de dos dígitos con un 0 al final, como en el siguiente problema:

$$\begin{array}{r}
 719 \text{ (} 720 - 1 \text{)} \\
 \times 247 \\
 \hline
 720 \times 247 = 177,840 \text{ (} 247 \times 9 \times 8 \times 10 \text{)} \\
 -1 \times 247 = - 247 \\
 \hline
 177,593
 \end{array}$$

Lo mismo ocurre en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 538 \text{ (} 540 - 2 \text{)} \\
 \times 346 \\
 \hline
 540 \times 346 = 186,840 \text{ (} 346 \times 6 \times 9 \times 10 \text{)} \\
 -2 \times 346 = - 692 \\
 \hline
 186,148
 \end{array}$$

Método cuando todo lo demás falla

Cuando todo lo demás falla, utilizo el siguiente método, que es infalible cuando no se puede encontrar otro método para explotar los números. En el método cuando todo lo demás falla, el problema de 3 por 3 se divide en tres partes: 3 por 1, 2 por 1 y 2 por 2. Como lo haces cada uno

cálculo, usted suma los totales a medida que avanza. Estos problemas son difíciles, especialmente si no puedes ver el número original. En mi presentación de 3 por 3 y 5 por 5 tengo los problemas escritos, pero hago todos los cálculos mentalmente.

He aquí un ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 851 \\
 \times \quad 527 \\
 \hline
 500 \times 851 = 425,500 \\
 27 \times 800 = + 21,600 \\
 \hline
 447,100 \\
 27 \times 51 = + 1,377 \\
 \hline
 448,477
 \end{array}$$

En la práctica, el cálculo se realiza como se muestra a continuación. A veces uso el código fonético para almacenar los dígitos de las millares (por ejemplo, 447 = nuestra alfombra) y pongo el dígito de las centenas (1) en mis dedos:

$$\begin{array}{r}
 851 \\
 \times \quad 527 \\
 \hline
 5 \times 851 = 4,255 \\
 8 \times 27 = + 216 \quad \text{"Our rug"} \\
 \hline
 4,471 \times 100 = 447,100 \\
 51 \times 27 = + 1,377 \\
 \hline
 448,477
 \end{array}$$

Hagamos otro ejemplo, pero esta vez dividiré el primer número. (Por lo general, divido el más grande para que el problema de la suma sea más fácil).

$$\begin{array}{r}
 923 \\
 \times 673 \\
 \hline
 9 \times 673 = 6,057 \\
 6 \times 23 = + 138 \quad \text{"Shut up"} \\
 \hline
 6,195 \times 100 = 619,500 \\
 73 \times 23 = + 1,679 \\
 \hline
 621,179
 \end{array}$$

EXERCISE: 3-BY-3 MULTIPLICATION

- | | | | | |
|--|--|--|--|--|
| 1. $\begin{array}{r} 644 \\ \times 286 \\ \hline \end{array}$ | 2. $\begin{array}{r} 596 \\ \times 167 \\ \hline \end{array}$ | 3. $\begin{array}{r} 853 \\ \times 325 \\ \hline \end{array}$ | 4. $\begin{array}{r} 343 \\ \times 226 \\ \hline \end{array}$ | 5. $\begin{array}{r} 809 \\ \times 527 \\ \hline \end{array}$ |
| 6. $\begin{array}{r} 942 \\ \times 879 \\ \hline \end{array}$ | 7. $\begin{array}{r} 692 \\ \times 644 \\ \hline \end{array}$ | 8. $\begin{array}{r} 446 \\ \times 176 \\ \hline \end{array}$ | 9. $\begin{array}{r} 658 \\ \times 468 \\ \hline \end{array}$ | 10. $\begin{array}{r} 273 \\ \times 138 \\ \hline \end{array}$ |
| 11. $\begin{array}{r} 824 \\ \times 206 \\ \hline \end{array}$ | 12. $\begin{array}{r} 642 \\ \times 249 \\ \hline \end{array}$ | 13. $\begin{array}{r} 783 \\ \times 589 \\ \hline \end{array}$ | 14. $\begin{array}{r} 871 \\ \times 926 \\ \hline \end{array}$ | 15. $\begin{array}{r} 341 \\ \times 715 \\ \hline \end{array}$ |
| 16. $\begin{array}{r} 417 \\ \times 298 \\ \hline \end{array}$ | 17. $\begin{array}{r} 557 \\ \times 756 \\ \hline \end{array}$ | 18. $\begin{array}{r} 976 \\ \times 878 \\ \hline \end{array}$ | 19. $\begin{array}{r} 765 \\ \times 350 \\ \hline \end{array}$ | |

Los siguientes problemas están integrados en el modelo 5 por 5.
Problemas de multiplicación en la siguiente sección:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| 20. $\begin{array}{r} 154 \\ \times 423 \\ \hline \end{array}$ | 21. $\begin{array}{r} 545 \\ \times 834 \\ \hline \end{array}$ | 22. $\begin{array}{r} 216 \\ \times 653 \\ \hline \end{array}$ | 23. $\begin{array}{r} 393 \\ \times 822 \\ \hline \end{array}$ |
|--|--|--|--|

MULTIPLICACIÓN 5 POR 5

El problema más grande que intentaremos es la multiplicación mental de dos números de cinco dígitos. Para hacer un 5x5 es necesario dominar

2 por 2, 2 por 3 y 3 por 3, así como el código fonético. Ahora sólo es cuestión de juntarlo todo. Como hiciste en los problemas de cuadrados de cinco dígitos, usarás la ley distributiva para descomponer los números. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 27,639 (27,000 + 639) \\ \times 52,196 (52,000 + 196) \end{array}$$

Con base en esto, puedes dividir el problema en cuatro problemas de multiplicación más sencillos, que ilustro a continuación en forma entrecruzada como un 2 por 2, dos 3 por 2 y finalmente un 3 por 3, sumando los resultados para un total general. Eso es,

$$(27 \times 52) \text{ millones} + [(27 \times 196) + (52 \times 639)] \text{ mil} + (639 \times 196)$$

Al igual que con los cuadrados de cinco dígitos, empiezo en el medio con los de 3 por 2, empezando por el más difícil de 3 por 2:

$$1. \quad 52 \times 639 = 52 \times 71 \times 9 = 3,692 \times 9 = 33,228$$

"Mom, no knife"

Al memorizar 33,228 con el mnemotécnico Mamá, sin cuchillo, luego pasas al segundo 3 por 2:

$$2. \quad 27 \times 196 = 27 \times (200 - 4) = 5,400 - 108 = 5,292$$

y agrégalo al número que estás almacenando:

$$\begin{array}{r} 3. \quad 33,228 (\text{"Mom, no knife"}) \\ + 5,292 \\ \hline 38,520 \end{array}$$

para un nuevo total, que almacenamos como:

"Filas de cine" (38 millones, 520 mil)

Aferrándose a las líneas de la película, calcule el 2 por 2:

$$4. 52 \times 27 = 52 \times 9 \times 3 = 1,404$$

Llegados a este punto, puedes dar parte de la respuesta. Dado que este 2 por 2 representa 52×27 millones, 1.404 representa 1.000 millones, 404 millones.

Dado que 404 millones no provocarán un acarreo, se puede decir con seguridad: "Mil millones..."

$$5. 404 + \text{"Película"} (38) = 442$$

En este paso, agrega 404 a la película (38) para obtener 442, momento en el cual puede decir: "... 442 millones...". Puede decir esto porque sabe que 442 no se llevará a cabo; ha echado un vistazo hacia adelante a los 3- by-3 para ver si hará que 442 se traslade a un número mayor. Si descubriera que se vendería, diría "443 millones". Pero dado que las líneas son 520 000 y el 3 por 3 (639×196) no excederá las 500 000 (una estimación aproximada de $600 \times 200 = 120\,000$ muestra esto), está a salvo.

$$6. 639 \times 196 = 639 \times 7 \times 7 \times 4 = 4,473 \times 7 \times 4 = 31,311 \times 4 = 125,244$$

Mientras sigues manteniendo las líneas, ahora calculas el 3 por 3 usando el método de factorización, para obtener 125,244. Podrías convertir 244 en una palabra como más cerca. El paso final es una simple adición de:

$$7. 125.244 + \text{"Líneas"} (520.000)$$

Esto le permite decir el resto de la respuesta: "... 645,244". Dado que una imagen vale más que mil cálculos, aquí está nuestra imagen de cómo se vería:

$$\begin{array}{r} 27,639 \\ \times 52,196 \\ \hline \end{array}$$

"Mom, no knife"

$$639 \times 52 = 33,228$$

$$196 \times 27 = + 5,292$$

"Movie lines"

$$38,520 \times 1,000 = 38,520,000$$

$$52 \times 27 \times 1 \text{ million} = + 1,404,000,000$$

$$1,442,520,000$$

$$639 \times 196 = + 125,244$$

$$1,442,645,244$$

Debo hacer una nota entre paréntesis: supongo que al hacer 5 por 5 se puede escribir el problema en una pizarra o en una hoja de papel. Si no puedes, tendrás que crear una mnemónica para cada uno de los cuatro números. Por ejemplo, en el último problema, podrías almacenar el problema como:

$$\begin{array}{r} 27,639 \text{—"Neck jump"} \\ \times 52,196 \text{—"Lion dopish"} \\ \hline \end{array}$$

Luego multiplicarías león $\times$ salto, dopish $\times$ cuello, león $\times$ cuello y finalmente dopish $\times$ salto. Obviamente esto te ralentizaría un poco, pero si quieres el desafío adicional de no poder ver los números, aún puedes resolver el problema.

Concluimos con una multiplicación más de 5 por 5:

$$\begin{array}{r} 79,838 \\ \times 45,547 \\ \hline \end{array}$$

Los pasos son los mismos que los del último problema. empiezas con el más difícil 3 por 2 y almacena la respuesta con un mnemotécnico:

$$\begin{aligned} \text{I. } 547 \times 79 &= 547 \times (80 - 1) = 43,760 - 547 \\ &= 43,213 \text{—"Rome anatomy"} \end{aligned}$$

Luego calculas los otros 3 por 2.

$$2. 838 \times 45 = 838 \times 5 \times 9 = 4,190 \times 9 = 37,710$$

Sumando los 3 por 2, memoriza el nuevo total.

$$\begin{array}{r} 3. \quad 43,213 \text{—“Rome anatomy”} \\ + 37,710 \\ \hline 80,923 \text{—“Face Panama”} \end{array}$$

$$4. 79 \times 45 = 79 \times 9 \times 5 = 711 \times 5 = 3,555$$

El 2 por 2 te da el primer dígito de la respuesta final, que puedes decir en voz alta con confianza: “Tres mil millones...”

$$5. 555 + \text{“Cara” (80)} = 635$$

Los millones de dígitos de la respuesta implican un acarreo de 635 a 636, porque Panamá (923) necesita sólo 77.000 para que se lleve, y el 3 por 3 (838×547) fácilmente excederá esa cifra. Entonces dices: “... 636 millones ...”

El 3 por 3 se calcula mediante el método de la suma:

$$\begin{array}{r} 6. \quad \quad \quad 838 \\ \quad \quad \times \quad 547 \text{ (540 + 7)} \\ \hline 540 \times 838 = 452,520 \text{ (838} \times 9 \times 6 \times 10) \\ 7 \times 800 = + 5,600 \\ \hline 458,120 \\ 7 \times 38 = + 266 \\ \hline 458,386 \end{array}$$

Y en el siguiente paso sumas este total a Panamá (923,000):

$$\begin{array}{r} 7. \quad 923,000 \\ + 458,386 \\ \hline 1,381,386 \end{array}$$

Como ya has usado el 1 en el acarreo a 636 millones,
 simplemente diga los miles: "... 381 mil... 386", ¡y haga una reverencia!
 Este problema se puede ilustrar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 79,838 \\ \times 45,547 \\ \hline \end{array}$$

"Rome anatomy"

$$547 \times 79 = 43,213$$

$$838 \times 45 = \underline{+37,710}$$

"Face Panama"

$$80,923 \times 1,000 = 80,923,000$$

$$79 \times 45 \times 1 \text{ million} = \underline{+ 3,555,000,000}$$

$$3,635,923,000$$

$$838 \times 547 = \underline{+ 458,386}$$

$$3,636,381,386$$

EXERCISE: 5-BY-5 MULTIPLICATION

1.	$\begin{array}{r} 65,154 \\ \times 19,423 \\ \hline \end{array}$	2.	$\begin{array}{r} 34,545 \\ \times 27,834 \\ \hline \end{array}$	3.	$\begin{array}{r} 69,216 \\ \times 78,653 \\ \hline \end{array}$	4.	$\begin{array}{r} 95,393 \\ \times 81,822 \\ \hline \end{array}$
----	--	----	--	----	--	----	--

Capítulo 9

Presto-digitalización: el arte de Magia Matemática

Jugar con números me ha traído una gran alegría en la vida. Descubrí que la aritmética puede ser tan entretenida como la magia. Pero comprender los secretos mágicos de la aritmética requiere álgebra. Por supuesto, hay otras razones para aprender álgebra (exámenes SAT, modelado de problemas del mundo real, programación de computadoras y comprensión de las matemáticas superiores, por nombrar sólo algunas), pero lo primero que me interesó en el álgebra fue el deseo de comprender algo de magia matemática. trucos, que ahora os presento!

MATEMÁTICAS PSÍQUICAS

Dígale a un voluntario del público: "Piense en un número, cualquier número". Y también debería decir: "Pero para ponértelo más fácil, piensa en un número de uno o dos dígitos". Después de haberle recordado a tu voluntaria que no hay manera de que puedas saber su número, pídele que:

1. duplicar el número,
2. sumar
- 12, 3. dividir el total
- entre 2, 4. restar el número original.

Luego diga: "¿Estás pensando ahora en el número seis?" Pruebe esto usted mismo primero y verá que la secuencia siempre produce el número 6, sin importar qué número se seleccionó originalmente.

Por qué funciona este truco

Este truco se basa en álgebra simple. De hecho, a veces uso esto como una forma de presentar el álgebra a los estudiantes. El número secreto que eligió tu voluntario puede estar representado por la letra x . Estas son las funciones que realizó en el orden en que las realizó:

1. $2x$ (el doble del número)

2. $2x + 12$ (luego suma 12) 3.

$(2x + 12) \div 2 = x + 6$ (luego divide por 2) 4. $x + 6 - x = 6$

(luego resta el número original)

Entonces, no importa qué número elija su voluntario, la respuesta final siempre será 6. Si repite este truco, pídale al voluntario que agregue un número diferente en el paso 2 (por ejemplo, 18). La respuesta final será la mitad de ese número (es decir, 9).

¡LA MAGIA 1089!

He aquí un truco que existe desde hace siglos. Haga que el miembro de su audiencia saque papel y lápiz y:

1. Escriba en secreto un número de tres dígitos donde los dígitos sean decrecientes (como 851 o 973),
2. invertir ese número y restarlo del primer número,
3. toma esa respuesta y agrégala al reverso de sí misma.

Al final de esta secuencia, aparecerá mágicamente la respuesta 1089, sin importar el número que su voluntario eligió originalmente. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 851 \\ - 158 \\ \hline 693 \\ + 396 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Por qué funciona este truco

No importa qué número de tres dígitos elijas tú o cualquier otra persona en este juego, el resultado final siempre será 1089. ¿Por qué? Sea abc el número desconocido de tres dígitos. Algebraicamente, esto es igual a:

$$100a + 10b + c$$

Cuando inviertes el número y lo restas del original número, se obtiene el número cba , algebraicamente igual a:

$$100c + 10b + a$$

Al restar cba de abc se obtiene:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) \\ = 100(a - c) + (c - a) \\ = 99(a - c) \end{aligned}$$

Por lo tanto, después de restar en el paso 2, debemos tener uno de los siguientes múltiplos de 99: 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 u 891, cada uno de los cuales producirá 1089 después de sumarlo al reverso de mismo, como hicimos en el paso 3.

TRUCOS DE LOS DÍGITOS FALTANTES

Usando el número 1089 del último efecto, entregue una calculadora a una voluntaria y pídale que multiplique 1089 por cualquier número de tres dígitos que le guste, pero que no le diga cuál es el número de tres dígitos. (Digamos que multiplica en secreto $1.089 \times 256 = 278.784$.) Pregúntele cuántos dígitos hay en su respuesta. Ella responderá: "Seis".

Luego dices: "Llámame cinco de tus seis dígitos en cualquier orden" te gusta. Intentaré determinar el dígito que falta".

Supongamos que grita: "Dos... cuatro... siete... ocho... ocho".

Le dices correctamente que omitió el número 7.

El secreto se basa en el hecho de que un número es múltiplo de 9 si y sólo si sus dígitos suman un múltiplo de 9. Dado que $1 + 0 + 8 + 9 =$

18 es múltiplo de 9, entonces también lo es 1089. Por lo tanto, 1089 multiplicado por cualquier número entero también será un múltiplo de 9. Dado que los dígitos mencionados suman 29, y el siguiente múltiplo de 9 mayor que 29 es 36, nuestro voluntario Debe haber omitido el número 7 (ya que $29 + 7 = 36$).

Hay formas más sutiles de obligar al voluntario a terminar con una múltiplo de 9. Estos son algunos de mis favoritos:

1. Haga que el voluntario elija al azar un número de seis dígitos, mezcle sus dígitos y luego reste el número de seis dígitos más pequeño del más grande. Dado que estamos restando dos números con la misma suma mod (de hecho, la suma idéntica de dígitos), la diferencia resultante tendrá una suma mod de 0 y, por lo tanto, será un múltiplo de 9. Luego continúe como antes para encontrar el dígito que falta. .
2. Haga que el voluntario elija en secreto un número de cuatro dígitos, invierta los dígitos y luego reste el número menor del mayor. (Este será un múltiplo de 9.) Luego multiplíquelo por cualquier número de tres dígitos y continúa como antes.
3. Pídale al voluntario que multiplique números de un dígito al azar hasta que el producto tenga siete dígitos. No está "garantizado" que esto produzca un múltiplo de 9, pero en la práctica lo hará al menos el 90% de las veces (hay muchas posibilidades de que los números de un dígito que se multiplican incluyan un 9 o dos 3 o dos 6, o un 3 y un 6). A menudo utilizo este método frente a audiencias matemáticamente avanzadas que podrían ver otros métodos.

Hay un problema al que debemos prestar atención. Supongamos que los números mencionados suman un múltiplo de 9 (digamos 18). Entonces no tienes forma de determinar si el dígito que falta es 0 o 9. ¿Cómo se soluciona eso? Sencillo: ¡haces trampa! Simplemente dice: "No omitiste un cero, ¿verdad?" Si omitió un 0, habrás completado el truco con éxito. Si no omitió el 0, le dices: "¡Oh, parecía que no pensabas en nada! No omitiste uno, dos, tres o cuatro, ¿verdad? Ella negará con la cabeza o dirá que no.

Luego continúa con: "Tampoco omitiste un cinco, seis, siete u ocho. Dejaste de lado el número nueve, ¿no? ¡Ella responderá con armativo y recibirás tu merecido aplauso!

ADICIÓN DE SALTO

Este truco combina un rápido cálculo mental con una predicción asombrosa. Al entregarle al espectador una tarjeta con diez líneas, numeradas del 1 al 10, pídale que piense en dos números positivos entre 1 y 20 e introdúzcalos en las líneas 1 y 2 de la tarjeta. Luego haga que el espectador escriba la suma de las líneas 1 y 2 en la línea 3, luego la suma de las líneas 2 y 3 en la línea 4, y así sucesivamente como se ilustra a continuación.

1	<u>9</u>
2	<u>2</u>
3	<u>11</u>
4	<u>13</u>
5	<u>24</u>
6	<u>37</u>
7	<u>61</u>
8	<u>98</u>
9	<u>159</u>
10	<u>257</u>

Finalmente, haz que el espectador te muestre la carta. De un vistazo, podrás indicarle la suma de todos los números de la tarjeta. Por ejemplo, en nuestro ejemplo, podrías anunciar instantáneamente que los números suman 671 más rápido de lo que el espectador podría hacerlo usando una calculadora. Como estímulo, entregue al espectador una calculadora y pídale que divida el número de la línea 10 por el número de la línea 9. En nuestro ejemplo, el cociente $\frac{257}{159}$ 1,616... Haga que el espectador anuncie los primeros tres dígitos del cociente, luego voltea la tarjeta (donde ya has escrito una predicción). ¡Se sorprenderá al ver que ya has escrito el número 1,61!

Por qué funciona este truco

Para realizar el cálculo rápido, simplemente multiplica el número de la línea 7 por 11. Aquí $61 \times 11 = 671$. La razón por la que esto funciona se ilustra en la siguiente tabla. Si denotamos los números en las líneas 1

y 2 por x e y , respectivamente, entonces la suma de las líneas 1 a 10 debe ser $55x + 88y$, lo que equivale a 11 veces $(5x + 8y)$, es decir, once veces el número de la línea 7.

1	<u>x</u>
2	<u>y</u>
3	<u>$x + y$</u>
4	<u>$x + 2y$</u>
5	<u>$2x + 3y$</u>
6	<u>$3x + 5y$</u>
7	<u>$5x + 8y$</u>
8	<u>$8x + 13y$</u>
9	<u>$13x + 21y$</u>
10	<u>$21x + 34y$</u>
Total:	<u>$55x + 88y$</u>

En cuanto a la predicción, aprovechamos el hecho de que para cualquier número positivo, a, b, c, d , si $a/b < c/d$, entonces se puede demostrar que la fracción que se obtiene “suma mal las fracciones” (es decir, , sumando los numeradores y sumando los denominadores) debe estar entre las dos fracciones originales. Eso es,

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Así, el cociente de la línea 10 dividido por la línea 9 $(21x + 34y)/(13x + 21y)$, debe quedar entre

$$1.615 \dots = \frac{21x}{13x} < \frac{21x + 34y}{13x + 21y} < \frac{34y}{21y} = 1.619 \dots$$

Por lo tanto, la relación debe comenzar con los dígitos 1,61, como se predijo.

De hecho, si continuas el proceso de salto indefinidamente, la proporción de términos consecutivos se acerca cada vez más a

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887 \dots$$

un número con tantas propiedades asombrosamente hermosas y misteriosas que a menudo se le llama proporción áurea.

CUADRADOS MÁGICOS

¿Estás listo para un desafío de otro tipo? A continuación encontrarás lo que se llama un cuadrado mágico. Se ha escrito mucho sobre los cuadrados mágicos y cómo construirlos, desde la antigua China. Aquí describimos una manera de presentar cuadrados mágicos de una manera entretenida. Esta es una rutina que he estado haciendo durante años.

Saco una tarjeta de presentación con lo siguiente escrito en el reverso:

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

= 34

Yo digo: “Esto se llama cuadrado mágico. De hecho, es el cuadrado mágico más pequeño que puedes crear, usando los números del uno al dieciséis. Notarás que cada fila y cada columna suma el mismo número: treinta y cuatro. Ahora que he realizado un estudio tan extenso sobre los cuadrados mágicos, me propongo crear uno para ti ante tus propios ojos”.

Luego le pido a alguien del público que me dé cualquier número mayor que 34. Supongamos que dice 67.

Luego saco otra tarjeta de presentación, dibujo una cuadrícula en blanco de 4 por 4 y coloco el número 67 a su derecha. Luego le pido que señale los cuadrados, uno a la vez, en cualquier orden. Mientras señala una casilla vacía, inmediatamente escribo un número dentro de ella. El resultado final se ve así:

16	19	23	9
22	10	15	20
11	25	17	14
18	13	12	24

= 67

Continúo: “Ahora con el primer cuadrado mágico, cada fila y columna suma treinta y cuatro. [Normalmente guardo la carta treinta y cuatro en este momento.] Veamos cómo nos fue con tu cuadrado”. Después de comprobar que cada fila y columna suman 67, digo: “Pero no me quedé ahí. Por ti, decidí dar un paso más. ¡Observa que ambas diagonales suman sesenta y siete! Luego señalo que los cuatro cuadrados en la esquina superior izquierda suman 67 ($16 + 19 + 22 + 10 = 67$), al igual que los otros tres cuadrados de las esquinas, los cuatro cuadrados del medio y los cuatro cuadrados de las esquinas. ! “Todos suman sesenta y siete. Pero no confíe en mi palabra para nada de esto. ¡Por favor, guarda este cuadrado mágico como recuerdo mío y compruébalo por ti mismo!

CÓMO CONSTRUIR UN CUADRADO MÁGICO

Puedes crear un cuadrado mágico que sume cualquier número aprovechando el cuadrado mágico original que suma 34. Mantén ese cuadrado al alcance de la vista mientras construyes el cuadrado mágico del voluntario. Mientras dibujas la cuadrícula de 4 por 4, realiza mentalmente los cálculos de los pasos 1 y 2:

1. Reste 34 del número dado (p. ej., $67 - 34 = 33$).
2. Divida este número por 4 (por ejemplo, $33 \div 4 = 8$ con un resto de 1). El cociente es el primer número “mágico”. El cociente más el resto es el segundo número “mágico”.
(Aquí nuestros números mágicos son 8 y 9.)
3. Cuando el voluntario señala un cuadrado, mire discretamente el cuadrado 34 y vea qué hay en el cuadrado correspondiente. Si es 13, 14, 15 o 16, agréguele el segundo número (por ejemplo, 9). Si no, suma el primer número mágico (por ejemplo, 8).
4. Inserta el número apropiado hasta completar el cuadrado mágico.

Tenga en cuenta que cuando el número dado es par, pero no múltiplo de 4, entonces su primer y segundo número mágico serán iguales, por lo que

solo tienes un número mágico para sumar a los números de tu cuadrado de 34.

Por qué funciona este truco

La razón por la que este método funciona se basa en el hecho de que cada fila, columna, diagonal (y más) del cuadrado mágico mostrado originalmente suma 34. Supongamos que el número dado hubiera sido 82. Dado que $82 - 34 = 48$ (y $48 \div 4 = 12$), sumaríamos 12 a cada cuadrado.

Luego, cada grupo de cuatro que previamente había sumado 34 sumaría $34 + 48 = 82$. Vea el cuadrado mágico a continuación.

20	23	26	13
25	14	19	24
15	28	21	18
22	17	16	27

= 82

Por otro lado, si el número dado fuera 85, nuestros números mágicos serían 12 y 15, por lo que estaríamos sumando 3 más a los cuadrados que muestran 13, 14, 15 y 16. Dado que cada fila, columna y grupo de cuatro contiene exactamente uno de estos números, cada grupo de cuatro ahora sumaría $34 + 48 + 3 = 85$ en el siguiente cuadrado mágico.

20	23	29	13
28	14	19	24
15	31	21	18
22	17	16	30

= 85

Como pieza interesante de trivia matemática, permítanme señalar otra propiedad sorprendente del famoso cuadrado mágico de 3 por 3 que aparece a continuación.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

= 15

No solo las filas, columnas y diagonales suman 15, sino que si tratas las filas del cuadrado mágico como números de tres dígitos, puedes verificar en tu calculadora que $4922 + 3572 + 8162 = 2942 + 7532 + 6182$. Además, $4382 + 9512 + 2762 = 8342 + 1592 + 6722$. Si tienes curiosidad sobre por qué ocurre esta propiedad, quizás quieras explorar mi artículo “Cuadrados” mágicos. (incluido en la bibliografía).

RAÍCES CUBICADAS RÁPIDAS

Pídale a alguien que seleccione un número de dos dígitos y manténgalo en secreto. Luego pídale que eleve el número al cubo; es decir, multiplicarlo por sí mismo dos veces (usando una calculadora). Por ejemplo, si el número secreto es 68, haga que el voluntario calcule $68 \times 68 \times 68 = 314,432$. Luego pídale al voluntario que le diga su respuesta. Una vez que te diga el cubo, 314,432, podrás revelar instantáneamente el número secreto original, la raíz cúbica, 68. ¿Cómo?

Para calcular raíces cúbicas, necesitas aprender los cubos del 1 al 10:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 8$$

$$3^3 = 27$$

$$4^3 = 64$$

$$5^3 = 125$$

$$6^3 = 216$$

$$7^3 = 343$$

$$8^3 = 512$$

$$9^3 = 729$$

$$10^3 = 1000$$

Una vez que los hayas aprendido, calcular las raíces cúbicas será tan fácil como como pág. Por ejemplo, con este problema de ejemplo:

¿Cuál es la raíz cúbica de 314,432?

Para empezar, parece bastante difícil, pero que no cunda el pánico, es en realidad bastante simple. Como de costumbre, lo haremos paso a paso:

1. Observe la magnitud del número de miles (los números a la izquierda de la coma), 314 en este ejemplo.
2. Como 314 se encuentra entre $63 = 216$ y $73 = 343$, la raíz cúbica se encuentra en los 60 (ya que $60^3 = 216.000$ y $70^3 = 343.000$). Por tanto, el primer dígito de la raíz cúbica es 6.
3. Para determinar el último dígito de la raíz cúbica, tenga en cuenta que sólo el número 8 tiene un cubo que termina en 2 ($8^3 = 512$), por lo que el último dígito termina en 8.

Por lo tanto, la raíz cúbica de 314,432 es 68. Tres sencillos pasos y listo. Observe que cada dígito, del 0 al 9, aparece una vez entre los últimos dígitos de los cubos. (De hecho, el último dígito de la raíz cúbica es igual al último dígito del último dígito del cubo.

¡Descúbrelo!)

Ahora prueba uno para practicar:

¿Cuál es la raíz cúbica de 19,683?

1. 19 se encuentra entre 8 y 27 ($2^3 = 8$ y $3^3 = 27$).
2. Por lo tanto, la raíz cúbica es 2 y tantos.
3. El último dígito del problema es 3, que corresponde a $3^3 = 27$, por lo que 7 es el último dígito.

La respuesta es 27.

Observe que nuestra derivación del último dígito solo funcionará si el número original es la raíz cúbica de un número entero. Por ejemplo, la raíz cúbica de 19,684 es 27.0004572... definitivamente no 24. Es por eso que incluimos esto en nuestra sección de magia matemática y no en un capítulo anterior. (¡Además, el cálculo va tan rápido que parece magia!)

RAÍCES CUADRADA SIMPLIFICADA

Las raíces cuadradas también se pueden calcular fácilmente si tienes un cuadrado perfecto. Por ejemplo, si alguien te dijera que el cuadrado de un número de dos dígitos es 7569, podrías decirle inmediatamente que el número original (la raíz cuadrada) es 87. Aquí te explicamos cómo hacerlo.

1. Observe la magnitud del “número de centenas” (los números que preceden a los dos últimos dígitos), 75 en este ejemplo.
2. Dado que 75 se encuentra entre 64 ($8 \times 8 = 64$) y 81 ($9 \times 9 = 81$), entonces sabemos que la raíz cuadrada se encuentra en los 80. Por lo tanto, el primer dígito de la raíz cuadrada es 8. Ahora hay dos números cuyo cuadrado termina en 9: $3^2 = 9$ y $7^2 = 49$. Entonces el último dígito debe ser 3 o 7. Por tanto, la raíz cuadrada es 83 u 87. ¿Cuál?
3. Compara el número original con el cuadrado de 85 (que podemos calcular fácilmente como $80 \times 90 + 25 = 7225$). Como 7569 es mayor que 7225, la raíz cuadrada es el número mayor, 87.

Hagamos un ejemplo más.

¿Cuál es la raíz cuadrada de 4761?

Como 47 se encuentra entre 36 ($6^2 = 36$) y 49 ($7^2 = 49$), la respuesta debe estar en los 60. Dado que el último dígito del cuadrado es 1, el último dígito de la raíz cuadrada debe ser 1 o 9. Dado que 4761 es mayor que $65^2 = 4225$, la raíz cuadrada debe ser 69. Al igual que con el truco anterior de la raíz cúbica, este método sólo se puede aplicar cuando el número original dado es un cuadrado perfecto.

UNA SUMA “INCREÍBLE”

El siguiente truco me lo mostró por primera vez James “el Asombroso”. Randi, quien lo ha usado efectivamente en su magia. Aquí, el mago puede predecir el total de cuatro números de tres dígitos elegidos al azar.

Para preparar este truco necesitarás tres juegos de nueve cartas cada uno y un papel con el número 2247 escrito y luego cerrado en un sobre. A continuación, en cada uno de los tres juegos de tarjetas haga lo siguiente: En el Juego A

escriba los siguientes números, un número en cada tarjeta:

4286 5771 9083 6518 2396 6860 2909 5546 8174

En el Conjunto A escriba los siguientes números:

5792 6881 7547 3299 7187 6557 7097 5288 6548

En el conjunto C escriba los siguientes números:

2708 5435 6812 7343 1286 5237 6470 8234 5129

Seleccione a tres personas del público y entregue a cada una un juego de tarjetas. Haga que cada uno de sus voluntarios elija al azar una de las nueve cartas que tienen. Digamos que eligen los números 4286, 5792 y 5435. Ahora, en la secuencia, haga que cada uno diga en voz alta un dígito del número de cuatro dígitos, primero la persona A, luego la persona B y finalmente la persona C. Digamos que llaman en voz alta los números 8, 9 y 5. Escriba los números 8, 9 y 5 (895) y diga: "Debes admitir que este número fue elegido completamente al azar y no podría haber sido predicho de antemano".

Luego, haga que las tres personas digan un número diferente de sus tarjetas. Digamos que dicen en voz alta 4, 5 y 3. Escriba 453 debajo de 895. Luego repite esto dos veces más con los dos números restantes, lo que da como resultado cuatro números de tres dígitos, como por ejemplo:

	A	B	C
	8	9	5
	4	5	3
	2	2	4
	6	7	5
2	2	4	7

Luego pídale a alguien que sume los cuatro números y anuncie el total.

Luego, pídele a alguien que abra el sobre para revelar tu predicción.

¡Hacer una reverencia!

Por qué funciona este truco

Mire los números en cada juego de tarjetas y vea si puede encontrar algo consistente en ellos. Cada conjunto de números suma

mismo total. Establezca el total de números A en 20. Establezca el total de números B en 23. Establezca Los números C suman 17. Con los números de la persona C en la columna de la derecha totalizando 17, siempre pondrás el 7 y llevarás el 1. Con los números de la persona B suman 23, más el 1, siempre pondrás baje el 4 y lleve el 2. Finalmente, con los números de la persona A sumando a 20, sumando los 2 da un total de 2247!

UN DÍA PARA CUALQUIER FECHA

Concluimos nuestro libro con una de las hazañas clásicas de la mentalidad. cálculo: cómo calcular el día de la semana de cualquier persona cumpleaños. En realidad, esta es una habilidad muy práctica. No todos los días eso alguien te pedirá que saques al cuadrado un número de tres cifras, pero difícilmente Pasa el día sin que nadie te mencione una fecha en el pasado o futuro. Con sólo un poco de práctica, podrás rápida y fácilmente determinar el día de la semana de prácticamente cualquier fecha de la historia.

Primero asignamos un número de código a cada día de la semana. Ellos son Fácil de recordar:

Número	Día
1	Lunes
2	Martes
3	Miércoles
4	Jueves
5	Viernes
6	Sábado
7 o 0	Domingo

He descubierto que la lista anterior es fácil de recordar, especialmente porque El día 2 es el martes. A los demás días se les pueden dar mnemónicos similares: “El día 1 es el lunes, el día 4 es el jueves y el día 5 es el viernes. Para Miércoles, observa que si levantas tres dedos, obtienes la carta.

w. Para los fines de semana (al final de nuestra lista), podría pensar en El sábado es el día 6 y el domingo es el día 7 (especialmente si pronuncias el ? suavemente). O para recordar el cero, podrías pensar en el domingo como ¡ningún día o ningún día!

A continuación necesitamos un código para cada mes del año. estos meses Los códigos se utilizan para todos los años, con dos excepciones. En un año bisiesto (como 2000 o 2004 o 2008 o...) el código de mes para enero es 5, y el código de mes de febrero es 1. Para crear los códigos de mes Para que sea más fácil de recordar, le proporcionamos una tabla de mnemónicos a continuación.

Mnemónico de código de mes

6 de enero *		WINTER tiene 6 letras.
2 de febrero *		Febrero es el segundo mes del año.
Marzo	2	2 de marzo ¡al ritmo del tambor!
Abril	5	APRIL y FOOLS tienen 5 letras.
Puede	0	¿Puedo comer un sándwich? ¡Mantén el 0 de mayo!
Junio	3	El error de junio tiene 3 letras.
Julio	5	¡Mirando FIVER-works y FIVER-crackers!
Agosto	1	Agosto comienza con A, la primera letra.
4 de septiembre		Septiembre es el comienzo del OTOÑO.
Octubre	6	TRUCOS y REGALOS de Halloween.
2 de noviembre		¡Quiero 2 porciones de pavo, por favor!
4 de diciembre		Diciembre es el ÚLTIMO mes, o NAVIDAD.

Ahora calculemos el día de la semana para cualquier fecha de 2006. Después eso, describiremos 2007, luego 2008, y así sucesivamente, durante el resto de su vida. Una vez que se hayan solucionado todas las fechas futuras, podremos mirar hacia atrás en el pasado y determinar los días de la semana para cualquier fecha del siglo XX o cualquier otro siglo.

A cada año se le asigna un número de código, y para 2006 ese año el código resulta ser 0 (consulte [esta página](#)).

Ahora, para calcular el día de la semana, simplemente suma el código de mes más el código de fecha más el código de año. Así, para el 3 de diciembre de 2006, calculamos

$$\text{Código de mes} + \text{Fecha} + \text{Código de año} = 4 + 3 + 0 = 7$$

Por tanto, esta fecha será el día 7, que es el domingo.

¿Qué tal el 18 de noviembre de 2006? Dado que noviembre tiene un código de mes de 2, tenemos

$$\text{Código de mes} + \text{Fecha} + \text{Código de año} = 2 + 18 + 0 = 20.$$

Ahora como la semana se repite cada siete días, podemos restar cualquier múltiplo de 7 a nuestra respuesta (7, 14, 21, 28, 35,...) y esto no cambiará el día de la semana. Entonces, nuestro último paso es restar el múltiplo más grande de 7 para obtener $20 - 14 = 6$. Por lo tanto, el 18 de noviembre de 2006 ocurre en sábado.

¿Qué tal 2007? Bueno, ¿qué pasa con tu cumpleaños a medida que pasas de un año al siguiente? Para la mayoría de los años, hay 365 días, y dado que 364 es un múltiplo de 7 ($7 \times 52 = 364$), el día de la semana de su cumpleaños se adelantará un día en la mayoría de los años. Si hay 366 días entre sus cumpleaños, entonces se adelantará dos días. Por lo tanto, para 2007 calculamos el día de la semana igual que antes, pero ahora usamos un código de año de 1. A continuación, 2008 es un año bisiesto.

(Los años bisiestos ocurren cada cuatro años, por lo que 2000, 2004, 2008, 2012,..., 2096 son los años bisiestos del siglo XXI). Por lo tanto, para 2008, el código de año aumenta en dos, por lo que tendrá un año código de 3. El próximo año, 2009, no es un año bisiesto, por lo que el código de año aumenta en uno, a 4.

Así, por ejemplo, el 2 de mayo de 2007 ha

$$\text{Código de mes} + \text{Fecha} + \text{Código de año} = 0 + 2 + 1 = 3$$

entonces esta fecha es un miércoles.

Para el 9 de septiembre de 2008, tenemos

$$\text{Código de mes} + \text{Fecha} + \text{Código de año} = 4 + 9 + 3 = 16$$

Restando el mayor múltiplo de 7, tenemos $16 - 14 = 2$, entonces esta fecha es un martes.

Por otro lado, el 16 de enero de 2008 es un año bisiesto, por lo que su código de mes será 5 en lugar de 6. Por lo tanto, tenemos

$$\text{Código de mes} + \text{Fecha} + \text{Código de año} = 5 + 16 + 3 = 24$$

y por tanto ocurre el día $24 - 21 = 3$, que es miércoles.

Para su referencia, hemos enumerado todos los códigos de años del siglo XXI en la figura de la página siguiente.

La buena noticia es que no tenemos que memorizar esta tabla. Podemos calcular mentalmente el código del año para cualquier fecha entre 2000 y 2099. Para el código del año $2000 + x$, simplemente tomamos el número $x/4$ (ignorando cualquier resto) y lo sumamos a x . El código de año se puede reducir restando cualquier múltiplo de 7.

Por ejemplo, con 2061, vemos que $= 15$ (con un resto de 1 que ignoramos). Por lo tanto, 2061 tiene un código de año de $61 + 15 = 76$. Y como podemos restar cualquier múltiplo de 7, usamos el código de año más simple de $76 - 70 = 6$.

<u>Year</u>	<u>Code</u>	<u>Year</u>	<u>Code</u>	<u>Year</u>	<u>Code</u>	<u>Year</u>	<u>Code</u>
2000	0	2025	3	2050	6	2075	2
2001	1	2026	4	2051	0	2076	4
2002	2	2027	5	2052	2	2077	5
2003	3	2028	0	2053	3	2078	6
2004	5	2029	1	2054	4	2079	0
2005	6	2030	2	2055	5	2080	2
2006	0	2031	3	2056	0	2081	3
2007	1	2032	5	2057	1	2082	4
2008	3	2033	6	2058	2	2083	5
2009	4	2034	0	2059	3	2084	0
2010	5	2035	1	2060	5	2085	1
2011	6	2036	3	2061	6	2086	2
2012	1	2037	4	2062	0	2087	3
2013	2	2038	5	2063	1	2088	5
2014	3	2039	6	2064	3	2089	6
2015	4	2040	1	2065	4	2090	0
2016	6	2041	2	2066	5	2091	1
2017	0	2042	3	2067	6	2092	3
2018	1	2043	4	2068	1	2093	4
2019	2	2044	6	2069	2	2094	5
2020	4	2045	0	2070	3	2095	6
2021	5	2046	1	2071	4	2096	1
2022	6	2047	2	2072	6	2097	2
2023	0	2048	4	2073	0	2098	3
2024	2	2049	5	2074	1	2099	4

Por lo tanto, el 19 de marzo de 2061 tiene

$$\text{Código de mes} + \text{Fecha} + \text{Código de año} = 2 + 19 + 6 = 27$$

Restar $27 - 21 = 6$ nos dice que esta fecha tendrá lugar el sábado.

¿Qué pasa con las fechas de nacimiento entre 1900 y 1999? Resuelva el problema exactamente como en el cálculo anterior, pero cambie la respuesta final

adelante un día (o simplemente agregue 1 al código de año). Así, el 19 de marzo de 1961 ocurrió en domingo.

Para la fecha 3 de diciembre de 1998, tenemos $\frac{98}{4} = 24$ (con un resto de 2 que ignoramos). Por lo tanto, 1998 tiene el código de año $98 + 24 + 1 = 123$, donde se agrega el más uno para las fechas del siglo XX. A continuación, resta el múltiplo más grande de 7. Como referencia útil, estos son los múltiplos de 7 que podrías necesitar:

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126,...

Dado que $123 - 119 = 4$, 1998 tiene un código de año de 4. Por lo tanto, 3 de diciembre de 1998, ha

$$\text{Código de mes} + \text{Fecha} + \text{Código de año} = 4 + 3 + 4 = 11$$

y $11 - 7 = 4$, por lo que esta fecha ocurrió un jueves.

Para fechas del siglo XIX, agregamos 3 al código de año. Por ejemplo, Charles Darwin y Abraham Lincoln nacieron el 12 de febrero de 1809. Dado que 2009 tiene un código de año de 4, entonces 1809 tiene un código de año de $4 + 3 = 7$, que se puede reducir a 0. Por lo tanto, el 12 de febrero, 1809, tiene

$$\text{Código de mes} + \text{Fecha} + \text{Código de año} = 2 + 12 + 0 = 14$$

y $14 - 14 = 0$, por lo que ambos nacieron en domingo.

Para las fechas del año 2100, sumamos 5 al código de año (o, de manera equivalente, restamos 2 del código de año). Por ejemplo, dado que 2009 tiene un código de año de 4, entonces 2109 tiene un código de año de $4 + 5 = 9$, que, después de restar 7, es lo mismo que un código de año de 2. Las fechas del siglo XVIII se tratan igual que en el 2100 (sumando 5 o restando 2), pero debemos tener cuidado. Los días que estamos calculando se basan en el calendario gregoriano, establecido en 1582. Pero este calendario no fue adoptado por Inglaterra (y las colonias americanas) hasta 1752, cuando al miércoles 2 de septiembre le siguió el jueves 14 de septiembre.

Comprobemos que efectivamente el 14 de septiembre de 1752 fue jueves. Desde

2052 tiene un código de año de 2 (de [esta página](#), o por $52 + 13 - 63 = 2$), luego 1752 tiene un código de año de 0. Por lo tanto, el 14 de septiembre de 1752 tiene

$$\text{Código de mes} + \text{Fecha} + \text{Código de año} = 4 + 14 + 0 = 18$$

y $18 - 14 = 4$, por lo que efectivamente era jueves. Sin embargo, nuestra fórmula no funcionará para fechas anteriores (que se regían por el calendario juliano).

Finalmente, comentamos que bajo el calendario gregoriano, cada cuatro años ocurre un año bisiesto, a excepción de los años que son divisibles por 100, aunque existe una excepción a la excepción: los años divisibles por 400 son años bisiestos. Así, 1600, 2000, 2400 y 2800 son años bisiestos, pero 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300 y 2500 no son años bisiestos. De hecho, el calendario gregoriano se repite cada 400 años, por lo que puedes convertir cualquier fecha futura en una fecha cercana al 2000. Por ejemplo, el 19 de marzo de 2361 y el 19 de marzo de 2761 tendrán el mismo día de la semana que el 19 de marzo de 1961, que, como ya determinamos, es domingo.

EXERCISE: A DAY FOR ANY DATE

Determine los días de la semana para las siguientes fechas:

1. 19 de enero de 2007
2. 14 de febrero de 2012
3. 20 de junio de 1993
4. 1 de septiembre de 1983
5. 8 de septiembre de 1954
6. 19 de noviembre de 1863
7. 4 de julio de 1776
8. 22 de febrero de 2222
9. 31 de junio de 2468
10. 1 de enero de 2358

*En un año bisiesto, el código de enero es 5 y el código de febrero es 1.

Capítulo ∞

Epílogo: Cómo las matemáticas nos ayudan a pensar en cosas raras

Cosas

por Michael Shermer

Como editor de la revista Skeptic, director ejecutivo de la Skeptics Society y editor de Scientific American con una columna mensual titulada "Skeptic", recibo volúmenes de correo de personas que me desafían con historias sobre sus experiencias inusuales, como casas encantadas, fantasmas, experiencias cercanas a la muerte y extracorporales, avistamientos de ovnis, abducciones extraterrestres, sueños de premonición de muerte y mucho más.

Las historias más interesantes para mí son aquellas sobre acontecimientos altamente improbables. La implicación del relato del autor de la carta es que si no puedo ofrecer una explicación natural satisfactoria para ese evento en particular, se preserva el principio general del sobrenaturalismo. Una historia común es la de soñar con la muerte de un amigo o familiar, luego al día siguiente llega una llamada telefónica sobre la muerte inesperada de la persona en el sueño. ¿Cuáles son las posibilidades de eso? Me preguntan.

Aquí es donde las matemáticas entran en juego en nuestro pensamiento y razonamiento. No quiero discutir sobre cómo las matemáticas en la escuela enseñan a los estudiantes a pensar críticamente, porque eso probablemente lo han dicho casi todos los profesores de matemáticas en casi todas las clases de matemáticas en casi todas las escuelas de Estados Unidos, al menos una vez al año. Quiero dar algunos ejemplos específicos de cómo uso matemáticas muy simples para ayudarme en el trabajo de explicar por qué le suceden cosas raras a la gente.

Aunque no siempre puedo explicar estos sucesos específicos, un principio de probabilidad llamado Ley de los Grandes Números muestra que un suceso con una baja probabilidad de ocurrir en un pequeño número de

ensayos tiene una alta probabilidad de ocurrir en un gran número de ensayos. O, como me gusta decir, las probabilidades de uno a un millón ocurren 295 veces al día en Estados Unidos.

Empecemos por las premoniciones de muerte. Aquí hay un pequeño cálculo "del reverso del sobre" que hice. Los psicólogos nos dicen que una persona promedio tiene alrededor de cinco sueños por día, lo que equivale a 1.825 sueños por año. Incluso si recordamos sólo uno de cada diez sueños, eso da como resultado 182,5 sueños recordados al año. Hay 295 millones de estadounidenses, lo que significa que se recordarán 53.800 millones de sueños al año. Ahora bien, los antropólogos y sociólogos nos dicen que cada uno de nosotros conoce bastante bien a unas 150 personas (es decir, la persona promedio tiene unos 150 nombres en su libreta de direcciones sobre los cuales se puede decir algo significativo). Eso significa que existe una red de 44.300 millones de relaciones personales entre esos 295 millones de estadounidenses. La tasa de mortalidad anual en Estados Unidos por todas las causas y en todas las edades es de 0,008, o 2,6 millones por año. Es inevitable que algunos de esos 53.800 millones de sueños recordados tengan que ver con algunas de estas 2,6 millones de muertes entre los 295 millones de estadounidenses y sus 44.300 millones de relaciones. De hecho, sería un milagro que algunos sueños de "premonición de muerte" no se hicieran realidad.

Incluso si mis números son o, incluso o, el punto sigue en pie.

¿Cuáles son las probabilidades de que un sueño de premonición de muerte se haga realidad? Bastante bien.

Aquí interviene un factor psicológico adicional llamado sesgo de confirmación, en el que notamos los aciertos e ignoramos los errores en apoyo de nuestras creencias favoritas. El sesgo de confirmación explica cómo funcionan las teorías de la conspiración, por ejemplo. Las personas que se adhieren a una teoría de conspiración particular (el 11 de septiembre fue orquestado por la administración Bush para lanzar una guerra en el Medio Oriente), buscarán y encontrarán pequeños hechos aquí y allá que parecen indicar que podría ser cierto (Bush se sentó en ese salón de clases leyendo a los niños sobre las cabras como si supiera que estaba a salvo), mientras ignoraba la gran cantidad de evidencia que apunta a otra explicación más probable (Osama bin Laden y su banda de terroristas internacionales orquestaron el 11 de septiembre). El sesgo de confirmación también ayuda a explicar por qué los astrólogos, los lectores de cartas del tarot y los psíquicos parecen tener tanto éxito en

gente "lectora". Es probable que las personas que obtienen una lectura recuerden los pocos aciertos y olviden los innumerables errores. Cuando realmente se cuentan esos aciertos y errores (lo que hice una vez para un especial de televisión de ABC sobre psíquicos), resulta que no hay nada más que conjeturas y posibilidades aleatorias en juego.

En el caso del sueño de premonición de muerte, si tan solo un par de estas personas que tienen esos sueños cuentan sus historias milagrosas en un foro público (¡el próximo en Oprah!), lo paranormal parece reivindicado. De hecho, no es más que las leyes de la probabilidad en gran escala.

Este proceso matemático de pensar en cosas raras me llevó a otro cálculo aproximado sobre los milagros. La gente suele invocar el término milagro para describir acontecimientos realmente inusuales, acontecimientos cuyas probabilidades de ocurrir son de "uno a un millón". Bien, tomemos eso como nuestra definición de referencia. Un milagro es un evento cuyas probabilidades de ocurrir son de un millón a uno. Ahora, a medida que avanzamos en el día, vemos y escuchamos que suceden cosas aproximadamente una vez por segundo. Es decir, los datos del mundo y los acontecimientos que nos rodean llegan a través de nuestros sentidos a un ritmo de aproximadamente uno por segundo. Si estamos despiertos y alerta y estamos en el mundo, digamos, ocho horas al día, eso significa que recibimos treinta mil bits de datos por día, o un millón de eventos por mes. La gran mayoría de estos datos y Los acontecimientos carecen completamente de sentido, por supuesto, y nuestros cerebros están programados para filtrar y olvidar la gran mayoría de ellos porque, de lo contrario, nos sentiríamos abrumados. Pero, en el transcurso de un mes, esperaríamos que ocurrieran probabilidades de uno a millón al menos una vez. Si a esto le sumamos el sesgo de confirmación según el cual recordaremos los eventos más inusuales y olvidaremos el resto, es inevitable que alguien en algún lugar informe un milagro cada mes. ¡Y los tabloides estarán ahí para registrarlo!

Esta es una breve introducción a cómo funciona la ciencia. En nuestra búsqueda por comprender cómo funciona el mundo, necesitamos determinar qué es real y qué no, qué sucede por casualidad y qué sucede debido a alguna causa particular predecible. El problema al que nos enfrentamos es que el cerebro humano fue diseñado por la evolución para prestar atención a los acontecimientos realmente inusuales e ignorar el vasto conjunto de datos que se derivan

como tal, pensar estadísticamente y con probabilidades no es algo natural. La ciencia, en esa medida, no surge de forma natural. Se necesita algo de entrenamiento y práctica.

Además, existen esos molestos sesgos cognitivos que mencioné, como el sesgo de confirmación. Y hay otros. Los datos no hablan por sí solos. Los datos se filtran a través de cerebros muy subjetivos y sesgados. El sesgo egoísta, por ejemplo, dicta que tendemos a vernos a nosotros mismos desde una perspectiva más positiva que la que nos ven los demás: las encuestas nacionales muestran que la mayoría de los empresarios creen que son más morales que otros empresarios, mientras que los psicólogos que estudian la intuición moral piensan que son más morales que otros psicólogos similares. En una encuesta de la Junta de Exámenes de Ingreso a la Universidad realizada a 829.000 estudiantes de último año de secundaria, el 0 por ciento se calificó por debajo del promedio en “capacidad para llevarse bien con los demás”, mientras que el 60 por ciento se ubicó entre el 10 por ciento superior (presumiblemente no todos eran de Lake Woebegone). Y según un estudio de 1997 de US News & World Report sobre quiénes los estadounidenses creen que tienen más probabilidades de ir al cielo, el 52 por ciento dijo que Bill Clinton, el 60 por ciento pensó que la princesa Diana, el 65 por ciento eligió a Michael Jordan, el 79 por ciento eligió a la Madre Teresa y, al menos ¡87 por ciento, la persona con más probabilidades de ir al cielo fue el encuestado!

Emily Pronin, profesora de psicología de la Universidad de Princeton, y sus colegas probaron un sesgo llamado punto ciego, en el que los sujetos reconocían la existencia y la influencia en otros de ocho sesgos cognitivos diferentes, pero no lograban ver esos mismos sesgos en ellos mismos. En un estudio realizado con estudiantes de la Universidad de Stanford, cuando se les pidió que se compararan con sus compañeros en cualidades personales como la amabilidad y el egoísmo, como era de esperar, se calificaron más alto. Incluso cuando se advirtió a los sujetos sobre el sesgo de ser mejor que el promedio y se les pidió que reevaluaran sus evaluaciones originales, el 63 por ciento afirmó que sus evaluaciones iniciales eran objetivas, y el 13 por ciento incluso afirmó que originalmente eran demasiado modestas. En un segundo estudio, Pronin asignó aleatoriamente a los sujetos puntuaciones altas o bajas en una prueba de “inteligencia social”. Como era de esperar, aquellos que obtuvieron altas calificaciones calificaron la prueba como más justa y útil que aquellos que recibieron bajas calificaciones. Cuando se les preguntó si era posible que

había sido influenciado por la puntuación de la prueba, los sujetos respondieron que otros participantes habían sido mucho más parciales que ellos. En un tercer estudio en el que Pronin preguntó a los sujetos qué método utilizaban para evaluar sus propios prejuicios y los de los demás, descubrió que las personas tienden a utilizar teorías generales del comportamiento al evaluar a los demás, pero utilizan la introspección al evaluarse a sí mismos; sin embargo, en lo que se llama la ilusión de la introspección, la gente no cree que se pueda confiar en que los demás hagan lo mismo. Está bien para mí, pero no para ti.

El psicólogo de la Universidad de California en Berkeley, Frank J. Sulloway y yo hicimos un descubrimiento similar sobre un sesgo de atribución en un estudio que realizamos sobre por qué las personas dicen que creen en Dios y por qué piensan que otras personas creen en Dios. En general, la mayoría de las personas atribuyen su propia creencia en Dios a razones intelectuales como el buen diseño y la complejidad del mundo, mientras que atribuyen la creencia de otros en Dios a razones emocionales como que es reconfortante, da significado y que fueron criados. creer. Los politólogos han hecho un descubrimiento similar sobre las actitudes políticas, donde los republicanos justifican sus actitudes conservadoras con argumentos racionales pero afirman que los demócratas son “liberales de corazón sangriento”, y donde los demócratas afirman que sus actitudes liberales son las más racionales pero afirman que los republicanos lo son “. cruel.”

¿Cómo aborda la ciencia estos sesgos subjetivos? ¿Cómo sabemos cuando un reclamo es falso o real? Queremos tener la mente lo suficientemente abierta como para aceptar nuevas ideas radicales cuando surjan ocasionalmente, pero no queremos ser tan abiertos que se nos caiga el cerebro. Este problema nos llevó en la Skeptics Society a crear una herramienta educativa llamada Kit de detección de tonterías, inspirada en la discusión de Carl Sagan sobre cómo detectar “tonterías” en su maravilloso libro *The Demon-Haunted World*. En este kit de detección de mentiras, sugerimos diez preguntas que hacer cuando nos topemos con cualquier afirmación que pueda ayudarnos a decidir si tenemos una mente demasiado abierta al aceptarla o una mente demasiado cerrada al rechazarla.

1. ¿Qué tan confiable es la fuente del reclamo? Como Daniel Kevles demostró tan eficazmente en su libro de 1999 *The Baltimore Aair*, al investigar un posible fraude científico existe un problema de límites en

detectar una señal fraudulenta en medio del ruido de fondo de errores y descuidos que es parte normal del proceso científico. La investigación de notas de investigación en un laboratorio aliado con el premio Nobel David Baltimore por un comité independiente establecido por el Congreso para investigar posibles fraudes reveló una sorprendente cantidad de errores. Pero la ciencia es más confusa de lo que la mayoría de la gente cree. Baltimore fue exonerado cuando quedó claro que no hubo manipulación de datos intencionada.

2. ¿Esta fuente suele hacer afirmaciones similares? Los pseudocientíficos tienen la costumbre de ir mucho más allá de los hechos, por lo que cuando los individuos hacen numerosas afirmaciones extraordinarias, pueden ser algo más que iconoclastas. Se trata de una cuestión de escala cuantitativa, ya que algunos grandes pensadores suelen ir más allá de los datos en sus especulaciones creativas. Thomas Gold, de Cornell, es conocido por sus ideas radicales, pero ha acertado con suficiente frecuencia como para que otros científicos escuchen lo que tiene que decir. Gold propone, por ejemplo, que el petróleo no es en absoluto un combustible fósil, sino el subproducto de una biosfera profunda y caliente. Casi ninguno de los científicos terrestres con los que he hablado se toman en serio esta tesis, pero no consideran que Gold sea un chiflado. Lo que buscamos aquí es un patrón de pensamiento marginal que constantemente ignora o distorsiona los datos.

3. ¿Han sido verificadas las afirmaciones por otra fuente? Por lo general, los pseudocientíficos harán declaraciones que no están verificadas o sí lo están por una fuente dentro de su propio círculo de creencias. Debemos preguntar quién controla las reclamaciones, e incluso quién controla las fichas. El mayor problema con la debacle de la fusión fría, por ejemplo, no fue que los científicos Stanley Pons y Martin Fleischman estuvieran equivocados; fue que anunciaron su espectacular descubrimiento antes de que otros laboratorios lo verificaran (nada menos que en una conferencia de prensa) y, peor aún, cuando la fusión fría no se replicó, continuaron aferrándose a su afirmación.

4. ¿Cómo encaja esta afirmación con lo que sabemos sobre cómo funciona el mundo? Una afirmación extraordinaria debe situarse en un contexto más amplio para ver cómo encaja. Cuando la gente afirma que las pirámides y

Aunque la Esfinge fue construida hace más de diez mil años por una raza humana avanzada, no presentan ningún contexto para esa civilización anterior. ¿Dónde están el resto de los artefactos de esa gente? ¿Dónde están sus obras de arte, sus armas, su ropa, sus herramientas, su basura? Simplemente no es así como funciona la arqueología.

5. ¿Alguien ha hecho todo lo posible para refutar la afirmación o sólo se ha buscado evidencia confirmatoria? Este es el sesgo de confirmación, o la tendencia a buscar evidencia confirmatoria y rechazar o ignorar la evidencia disconforme. El sesgo de confirmación es poderoso y generalizado y es casi imposible para cualquiera de nosotros evitarlo. Es por eso que los métodos de la ciencia que enfatizan la verificación y reverificación, la verificación y la replicación, y especialmente los intentos de falsificar una afirmación, son tan críticos.

6. ¿La preponderancia de la evidencia converge a la conclusión del demandante, o a una diferente? La teoría de la evolución, por ejemplo, se demuestra mediante la convergencia de evidencia procedente de varias líneas de investigación independientes. Ningún fósil, ninguna evidencia biológica o paleontológica tiene escrita la palabra "evolución"; en cambio, hay una convergencia de evidencia de decenas de miles de fragmentos de evidencia que se suman a una historia de la evolución de la vida. Los creacionistas ignoran convenientemente esta convergencia y se centran en anomalías triviales o fenómenos actualmente inexplicables en la historia de la vida.

7. ¿El solicitante emplea las reglas aceptadas de la razón y las herramientas de investigación, o las ha abandonado en favor de otras que conducen a la conclusión deseada? Los ufólogos abusan de esta falacia al centrarse continuamente en un puñado de anomalías atmosféricas inexplicables y percepciones visuales erróneas por parte de testigos presenciales, mientras ignoran convenientemente el hecho de que la gran mayoría (90 a 95 por ciento) de los avistamientos de ovnis son completamente explicables con respuestas prosa

8. ¿Ha proporcionado el reclamante una explicación diferente para los fenómenos observados, o es estrictamente un proceso de negar la

explicación existente? Esta es una estrategia de debate clásica: critica a tu oponente y nunca armes lo que crees para evitar las críticas. Pero esta estratagema es inaceptable en la ciencia. Los escépticos del Big Bang, por ejemplo, ignoran la convergencia de la evidencia de este modelo cosmológico, se centran en los pocos defectos del modelo aceptado y todavía tienen que ofrecer una alternativa cosmológica viable que tenga una preponderancia de evidencia a su favor.

9. Si el demandante ha propuesto una nueva explicación, ¿da cuenta de tantos fenómenos como la antigua explicación? Los escépticos del VIH-SIDA argumentan que el estilo de vida, no el VIH, es la causa del SIDA. Sin embargo, para formular este argumento deben ignorar la convergencia de la evidencia que respalda el VIH como vector causal del SIDA, y al mismo tiempo ignorar evidencia tan flagrante como la correlación significativa entre el aumento del SIDA entre los hemofílicos poco después de que el VIH fuera introducido inadvertidamente en la sangre suministrar. Además de esto, su teoría alternativa no explica tantos datos como la teoría del VIH.

10. ¿Las creencias y prejuicios personales de los demandantes impulsan las conclusiones, o viceversa? Todos los científicos tienen creencias sociales, políticas e ideológicas que potencialmente podrían sesgar sus interpretaciones de los datos, pero ¿cómo afectan esos sesgos y creencias a su investigación? En algún momento, generalmente durante el sistema de revisión por pares, esos sesgos y creencias se eliminan de raíz, o se rechaza la publicación del artículo o libro. Por eso no se debe trabajar en un vacío intelectual. Si usted no detecta los sesgos en su investigación, alguien más lo hará.

No existe un conjunto definitivo de criterios que podamos aplicar para determinar cuán abiertos debemos ser cuando nos topamos con nuevas afirmaciones e ideas, pero sí con cálculos matemáticos sobre las probabilidades de que sucedan cosas raras y con un análisis del tipo de preguntas que debemos hacer cuando Nos encontramos con cosas raras, hemos dado un paso hacia la comprensión de nuestro extraño y maravilloso mundo.

Respuestas

CAPÍTULO 1: UN PEQUEÑO DAR Y RECIBIR

Suma de dos dígitos ([esta página](#))

1. $23 + 16 = 23 + 10 + 6 = 33 + 6 = 39$
2. $64 + 43 = 64 + 40 + 3 = 104 + 3 = 107$
3. $95 + 32 = 95 + 30 + 2 = 125 + 2 = 127$
4. $34 + 26 = 34 + 20 + 6 = 54 + 6 = 60$
5. $89 + 78 = 89 + 70 + 8 = 159 + 8 = 167$
6. $73 + 58 = 73 + 50 + 8 = 123 + 8 = 131$
7. $47 + 36 = 47 + 30 + 6 = 77 + 6 = 83$
8. $19 + 17 = 19 + 10 + 7 = 29 + 7 = 36$
9. $55 + 49 = 55 + 40 + 9 = 95 + 9 = 104$ 10. $39 + 38 = 39 + 30 + 8 = 69 + 8 = 77$

Suma de tres dígitos ([esta página](#))

1. $242 + 137 = 242 + 100 + 30 + 7 = 342 + 30 + 7 = 372 + 7 = 379$
2. $312 + 256 = 312 + 200 + 50 + 6 = 512 + 50 + 6 = 562 + 6 = 568$
3. $635 + 814 = 635 + 800 + 10 + 4 = 1435 + 10 + 4 = 1445 + 4 = 1449$
4. $457 + 241 = 457 + 200 + 40 + 1 = 657 + 40 + 1 = 697 + 1 = 698$
5. $912 + 475 = 912 + 400 + 70 + 5 = 1312 + 70 + 5 = 1382 + 5 = 1387$
6. $852 + 378 = 852 + 300 + 70 + 8 = 1152 + 70 + 8 = 1222 + 8 = 1230$
7. $457 + 269 = 457 + 200 + 60 + 9 = 657 + 60 + 9 = 717 + 9 = 726$
8. $878 + 797 = 878 + 700 + 90 + 7 = 1578 + 90 + 7 = 1668 + 7 = 1675$ o $878 + 797 = 878 + 800 - 3 = 1678 - 3 = 1675$
9. $276 + 689 = 276 + 600 + 80 + 9 = 876 + 80 + 9 = 956 + 9 = 965$
10. $877 + 539 = 877 + 500 + 30 + 9 = 1377 + 30 + 9 = 1407 + 9 = 1416$
11. $5400 + 252 = 5400 + 200 + 52 = 5600 + 52 = 5652$
12. $1800 + 855 = 1800 + 800 + 55 = 2600 + 55 = 2655$
13. $6120 + 136 = 6120 + 100 + 30 + 6 = 6220 + 30 + 6 = 6250 + 6 = 6256$
14. $7830 + 348 = 7830 + 300 + 40 + 8 = 8130 + 40 + 8 = 8170 + 8 = 8178$
15. $4240 + 371 = 4240 + 300 + 70 + 1 = 4540 + 70 + 1 = 4610 + 1 = 4611$

Resta de dos dígitos ([esta página](#))

1. $38 - 23 = 38 - 20 - 3 = 18 - 3 = 15$

2. $84 - 59 = 84 - 60 + 1 = 24 + 1 = 25$
3. $92 - 34 = 92 - 40 + 6 = 52 + 6 = 58$
4. $67 - 48 = 67 - 50 + 2 = 17 + 2 = 19$
5. $79 - 29 = 79 - 20 - 9 = 59 - 9 = 50$ o $79 - 29 = 79 - 30 + 1 = 49 + 1 = 50$
6. $63 - 46 = 63 - 50 + 4 = 13 + 4 = 17$
7. $51 - 27 = 51 - 30 + 3 = 21 + 3 = 24$
8. $89 - 48 = 89 - 40 - 8 = 49 - 8 = 41$
9. $125 - 79 = 125 - 80 + 1 = 45 + 1 = 46$
10. $148 - 86 = 148 - 90 + 4 = 58 + 4 = 62$

Resta de tres dígitos ([esta página](#))

1. $583 - 271 = 583 - 200 - 70 - 1 = 383 - 70 - 1 = 313 - 1 = 312$
2. $936 - 725 = 936 - 700 - 20 - 5 = 236 - 20 - 5 = 216 - 5 = 211$
3. $587 - 298 = 587 - 300 + 2 = 287 + 2 = 289$
4. $763 - 486 = 763 - 500 + 14 = 263 + 14 = 277$
5. $204 - 185 = 204 - 200 + 15 = 04 + 15 = 19$
6. $793 - 402 = 793 - 400 - 2 = 393 - 2 = 391$
7. $219 - 176 = 219 - 200 + 24 = 19 + 24 = 43$
8. $978 - 784 = 978 - 800 + 16 = 178 + 16 = 194$
9. $455 - 319 = 455 - 400 + 81 = 55 + 81 = 136$
10. $772 - 596 = 772 - 600 + 4 = 172 + 4 = 176$
11. $873 - 357 = 873 - 400 + 43 = 473 + 43 = 516$
12. $564 - 228 = 564 - 300 + 72 = 264 + 72 = 336$
13. $1428 - 571 = 1428 - 600 + 29 = 828 + 29 = 857$
14. $2345 - 678 = 2345 - 700 + 22 = 1645 + 22 = 1667$
15. $1776 - 987 = 1776 - 1000 + 13 = 776 + 13 = 789$

CAPÍTULO 2: PRODUCTOS DE UNA JUVENTUD DESPIERTA

Multiplicación 2 por 1 ([esta página](#))

1.	$\begin{array}{r} 82 \\ \times 9 \\ \hline 720 \\ + 18 \\ \hline 738 \end{array}$	2.	$\begin{array}{r} 43 \\ \times 7 \\ \hline 280 \\ + 21 \\ \hline 301 \end{array}$	3.	$\begin{array}{r} 67 \\ \times 5 \\ \hline 300 \\ + 35 \\ \hline 335 \end{array}$	4.	$\begin{array}{r} 71 \\ \times 3 \\ \hline 210 \\ + 3 \\ \hline 213 \end{array}$	5.	$\begin{array}{r} 93 \\ \times 8 \\ \hline 720 \\ + 24 \\ \hline 744 \end{array}$
----	---	----	---	----	---	----	--	----	---

6.	$\begin{array}{r} 49 \text{ or } 49 \\ \times 9 \\ \hline 360 \\ + 81 \\ \hline 441 \end{array}$	7.	$\begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline 80 \\ + 32 \\ \hline 112 \end{array}$	8.	$\begin{array}{r} 53 \\ \times 5 \\ \hline 250 \\ + 15 \\ \hline 265 \end{array}$	9.	$\begin{array}{r} 84 \\ \times 5 \\ \hline 400 \\ + 20 \\ \hline 420 \end{array}$	10.	$\begin{array}{r} 58 \\ \times 6 \\ \hline 300 \\ + 48 \\ \hline 348 \end{array}$
----	--	----	--	----	---	----	---	-----	---

11.	$\begin{array}{r} 97 \\ \times 4 \\ \hline 360 \\ + 28 \\ \hline 388 \end{array}$	12.	$\begin{array}{r} 78 \\ \times 2 \\ \hline 140 \\ + 6 \\ \hline 156 \end{array}$	13.	$\begin{array}{r} 96 \\ \times 9 \\ \hline 810 \\ + 54 \\ \hline 864 \end{array}$	14.	$\begin{array}{r} 75 \\ \times 4 \\ \hline 280 \\ + 20 \\ \hline 300 \end{array}$	15.	$\begin{array}{r} 57 \\ \times 7 \\ \hline 350 \\ + 49 \\ \hline 399 \end{array}$
-----	---	-----	--	-----	---	-----	---	-----	---

16.	$\begin{array}{r} 37 \\ \times 6 \\ \hline 180 \\ + 42 \\ \hline 222 \end{array}$	17.	$\begin{array}{r} 46 \\ \times 2 \\ \hline 80 \\ + 12 \\ \hline 92 \end{array}$	18.	$\begin{array}{r} 76 \\ \times 8 \\ \hline 560 \\ + 48 \\ \hline 608 \end{array}$	19.	$\begin{array}{r} 29 \\ \times 3 \\ \hline 60 \\ + 27 \\ \hline 87 \end{array}$	20.	$\begin{array}{r} 64 \\ \times 8 \\ \hline 480 \\ + 32 \\ \hline 512 \end{array}$
-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

Multiplicación 3 por 1 ([esta página](#))

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 431 \\
 \times \quad 6 \\
 \hline
 2400 \\
 + 180 \\
 \hline
 2580 \\
 + \quad 6 \\
 \hline
 2586
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad 637 \\
 \times \quad 5 \\
 \hline
 3000 \\
 + 150 \\
 \hline
 3150 \\
 + \quad 35 \\
 \hline
 3185^*
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad 862 \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 3200 \\
 + 240 \\
 \hline
 3440 \\
 + \quad 8 \\
 \hline
 3448
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad 957 \\
 \times \quad 6 \\
 \hline
 5400 \\
 + 300 \\
 \hline
 5700 \\
 + \quad 42 \\
 \hline
 5742
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad 927 \\
 \times \quad 7 \\
 \hline
 6300 \\
 + 140 \\
 \hline
 6440 \\
 + \quad 49 \\
 \hline
 6489
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad 728 \\
 \times \quad 2 \\
 \hline
 1400 \\
 + \quad 40 \\
 \hline
 1440 \\
 + \quad 16 \\
 \hline
 1456
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7. \quad 328 \\
 \times \quad 6 \\
 \hline
 1800 \\
 + 120 \\
 \hline
 1920 \\
 + \quad 48 \\
 \hline
 1968
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. \quad 529 \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 4500 \\
 + 180 \\
 \hline
 4680 \\
 + \quad 81 \\
 \hline
 4761
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9. \quad 807 \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 7200 \\
 + \quad 63 \\
 \hline
 7263
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10. \quad 587 \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 2000 \\
 + 320 \\
 \hline
 2320 \\
 + \quad 28 \\
 \hline
 2348^*
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11. \quad 184 \\
 \times \quad 7 \\
 \hline
 700 \\
 + 560 \\
 \hline
 1260 \\
 + \quad 28 \\
 \hline
 1288
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12. \quad 214 \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 1600 \\
 + \quad 80 \\
 \hline
 1680 \\
 + \quad 32 \\
 \hline
 1712
 \end{array}$$

13.	757	14.	259	15.	297		297	16.	751
	$\times 8$		$\times 7$		$\times 8$	or	$\times 8$		$\times 9$
	5600		1400		1600	$300 \times 8 =$	2400		6300
	$+ 400$		$+ 350$		$+ 720$	$- 3 \times 8 =$	$- 24$		$+ 450$
	6000		1750		2320		2376		6750
	$+ 56$		$+ 63$		$+ 56$				$+ 9$
	6056		1813		2376				6759

17.	457	18.	339	19.	134	20.	611
	$\times 7$		$\times 8$		$\times 8$		$\times 3$
	2800		2400		800		1800
	$+ 350$		$+ 240$		$+ 240$		$+ 33$
	3150		2640		1040		1833
	$+ 49$		$+ 72$		$+ 32$		
	3199		2712		1072		

21.	578	22.	247	23.	188	24.	968
	$\times 9$		$\times 5$		$\times 6$		$\times 6$
	4500		1000		600		5400
	$+ 630$		$+ 200$		$+ 480$		$+ 360$
	5130		1200		1080		5760
	$+ 72$		$+ 35$		$+ 48$		$+ 48$
	5202		1235*		1128		5808

25.	499		499	26.	670	27.	429	28.	862
	$\times 9$	or	$\times 9$		$\times 4$		$\times 3$		$\times 5$
	3600	$500 \times 9 =$	4500		2400		1200		4000
	$+ 810$	$-1 \times 9 =$	$- 9$		$+ 280$		$+ 60$		$+ 300$
	4410		4491		2680		1260		4300
	$+ 81$						$+ 27$		$+ 10$
	4491						1287		4310*

$$\begin{array}{r}
 29. \quad 285 \\
 \times \quad 6 \\
 \hline
 1200 \\
 + 480 \\
 \hline
 1680 \\
 + 30 \\
 \hline
 1710
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 30. \quad 488 \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 3600 \\
 + 720 \\
 \hline
 4320 \\
 + 72 \\
 \hline
 4392
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 31. \quad 693 \\
 \times \quad 6 \\
 \hline
 3600 \\
 + 540 \\
 \hline
 4140 \\
 + 18 \\
 \hline
 4158
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 32. \quad 722 \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 6300 \\
 + 180 \\
 \hline
 6480 \\
 + 18 \\
 \hline
 6498
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 33. \quad 457 \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 3600 \\
 + 450 \\
 \hline
 4050 \\
 + 63 \\
 \hline
 4113
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 34. \quad 767 \\
 \times \quad 3 \\
 \hline
 2100 \\
 + 180 \\
 \hline
 2280 \\
 + 21 \\
 \hline
 2301
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 35. \quad 312 \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 2700 \\
 + 90 \\
 \hline
 2790 \\
 + 18 \\
 \hline
 2808
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 36. \quad 691 \\
 \times \quad 3 \\
 \hline
 1800 \\
 + 270 \\
 \hline
 2070 \\
 + 3 \\
 \hline
 2073
 \end{array}$$

Cuadrados de dos dígitos ([esta página](#))

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \nearrow +4 \\ 1. \ 14^2 \end{array} \begin{array}{c} 18 \\ \searrow -4 \end{array} \begin{array}{c} 180 + 4^2 = 196 \\ 10 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \nearrow +3 \\ 2. \ 27^2 \end{array} \begin{array}{c} 30 \\ \searrow -3 \end{array} \begin{array}{c} 720 + 3^2 = 729 \\ 24 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \nearrow +5 \\ 3. \ 65^2 \end{array} \begin{array}{c} 70 \\ \searrow -5 \end{array} \begin{array}{c} 4200 + 5^2 = 4225 \\ 60 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \nearrow +1 \\ 4. \ 89^2 \end{array} \begin{array}{c} 90 \\ \searrow -1 \end{array} \begin{array}{c} 7920 + 1^2 = 7921 \\ 88 \end{array}
 \end{array}$$

$$5. \begin{array}{c} \nearrow +2 \\ 98^2 \\ \searrow -2 \end{array} \begin{array}{c} 100 \\ 96 \end{array} \rightarrow 9600 + 2^2 = 9604$$

$$6. \begin{array}{c} \nearrow +1 \\ 31^2 \\ \searrow -1 \end{array} \begin{array}{c} 32 \\ 30 \end{array} \rightarrow 960 + 1^2 = 961$$

$$7. \begin{array}{c} \nearrow +1 \\ 41^2 \\ \searrow -1 \end{array} \begin{array}{c} 42 \\ 40 \end{array} \rightarrow 1680 + 1^2 = 1681$$

$$8. \begin{array}{c} \nearrow +1 \\ 59^2 \\ \searrow -1 \end{array} \begin{array}{c} 60 \\ 58 \end{array} \rightarrow 3480 + 1^2 = 3481$$

$$9. \begin{array}{c} \nearrow +4 \\ 26^2 \\ \searrow -4 \end{array} \begin{array}{c} 30 \\ 22 \end{array} \rightarrow 660 + 4^2 = 676$$

$$10. \begin{array}{c} \nearrow +3 \\ 53^2 \\ \searrow -3 \end{array} \begin{array}{c} 56 \\ 50 \end{array} \rightarrow 2800 + 3^2 = 2809$$

$$11. \begin{array}{c} \nearrow +1 \\ 21^2 \\ \searrow -1 \end{array} \begin{array}{c} 22 \\ 20 \end{array} \rightarrow 440 + 1^2 = 441$$

$$12. \begin{array}{c} \nearrow +4 \\ 64^2 \\ \searrow -4 \end{array} \begin{array}{c} 68 \\ 60 \end{array} \rightarrow 4080 + 4^2 = 4096$$

$$13. \begin{array}{c} \nearrow +2 \\ 42^2 \\ \searrow -2 \end{array} \begin{array}{c} 44 \\ 40 \end{array} \rightarrow 1760 + 2^2 = 1764$$

14. 55^2 $\begin{array}{l} \xrightarrow{+5} 60 \\ \xrightarrow{-5} 50 \end{array}$ $\rightarrow 3000 + 5^2 = 3025$

15. 75^2 $\begin{array}{l} \xrightarrow{+5} 80 \\ \xrightarrow{-5} 70 \end{array}$ $\rightarrow 5600 + 5^2 = 5625$

16. 45^2 $\begin{array}{l} \xrightarrow{+5} 50 \\ \xrightarrow{-5} 40 \end{array}$ $\rightarrow 2000 + 5^2 = 2025$

17. 84^2 $\begin{array}{l} \xrightarrow{+4} 88 \\ \xrightarrow{-4} 80 \end{array}$ $\rightarrow 7040 + 4^2 = 7056$

18. 67^2 $\begin{array}{l} \xrightarrow{+3} 70 \\ \xrightarrow{-3} 64 \end{array}$ $\rightarrow 4480 + 3^2 = 4489$

19. 103^2 $\begin{array}{l} \xrightarrow{+3} 106 \\ \xrightarrow{-3} 100 \end{array}$ $\rightarrow 10,600 + 3^2 = 10,609$

20. 208^2 $\begin{array}{l} \xrightarrow{+8} 216 \\ \xrightarrow{-8} 200 \end{array}$ $\rightarrow 43,200 + 8^2 = 43,264$

CAPÍTULO 3: PRODUCTOS NUEVOS Y MEJORADOS

Multiplicar por 11 ([esta página](#))

$$\begin{array}{r} 1. \quad 35 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \underline{\quad} 5 \\ 8 \end{array} = 385$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 48 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \underline{\quad} 8 \\ 12 \end{array} = 528$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad 94 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \underline{\quad} 4 \\ 13 \end{array} = 1034$$

Problemas de multiplicación con el método de suma 2 por 2 ([esta página](#))

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 31 (30 + 1) \\
 \times 41 \\
 30 \times 41 = 1230 \\
 1 \times 41 = + 41 \\
 \hline
 1271
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{or} \quad 31 \\
 \times 41 (40 + 1) \\
 40 \times 31 = 1240 \\
 1 \times 31 = + 31 \\
 \hline
 1271
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad 27 (20 + 7) \\
 \times 18 \\
 20 \times 18 = 360 \\
 7 \times 18 = + 126 \\
 \hline
 486
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad 59 (50 + 9) \\
 \times 26 \\
 50 \times 26 = 1300 \\
 9 \times 26 = + 234 \\
 \hline
 1534
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad 53 (50 + 3) \\
 \times 58 \\
 50 \times 58 = 2900 \\
 3 \times 58 = + 174 \\
 \hline
 3074
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad 77 \\
 \times 43 (40 + 3) \\
 40 \times 77 = 3080 \\
 3 \times 77 = + 231 \\
 \hline
 3311
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad 23 (20 + 3) \\
 \times 84 \\
 20 \times 84 = 1680 \\
 3 \times 84 = + 252 \\
 \hline
 1932
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{or} \quad 23 \\
 \times 84 (80 + 4) \\
 80 \times 23 = 1840 \\
 4 \times 23 = + 92 \\
 \hline
 1932
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7. \quad 62 (60 + 2) \\
 \times 94 \\
 60 \times 94 = 5640 \\
 2 \times 94 = + 188 \\
 \hline
 5828
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. \quad 88 (80 + 8) \\
 \times 76 \\
 80 \times 76 = 6080 \\
 8 \times 76 = + 608 \\
 \hline
 6688
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9. \quad 92 (90 + 2) \\
 \times 35 \\
 90 \times 35 = 1230 \\
 2 \times 35 = + 70 \\
 \hline
 3220
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10. \quad 34 \quad 3 \quad 4 = 374 \text{ or } 340 \\
 \times 11 \quad 7 \quad + 34 \\
 \hline
 374
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11. \quad 85 \quad 8 \quad 5 = 935 \text{ or } 850 \\
 \times 11 \quad 13 \quad + 85 \\
 \hline
 935
 \end{array}$$

Problemas de multiplicación con el método de resta 2 por 2 ([esta página](#))

$$\begin{array}{r}
 1. \qquad \qquad 29(30 - 1) \\
 \quad \times 45 \\
 30 \times 45 = 1350 \\
 -1 \times 45 = -45 \\
 \hline
 1305
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \qquad \qquad 98(100 - 2) \\
 \quad \times 43 \\
 100 \times 43 = 4300 \\
 -2 \times 43 = -86 \\
 \hline
 4214
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \qquad \qquad 47 \\
 \quad \times 59(60 - 1) \\
 60 \times 47 = 2820 \\
 -1 \times 47 = -47 \\
 \hline
 2773
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \qquad \qquad 68(70 - 2) \\
 \quad \times 43 \\
 70 \times 38 = 2660 \\
 -2 \times 38 = -76 \\
 \hline
 2584
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \qquad \qquad 96(100 - 4) \\
 \quad \times 29 \\
 100 \times 29 = 2900 \\
 -4 \times 29 = -116 \\
 \hline
 2784
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{or} \qquad \qquad 96 \\
 \quad \times 29(30 - 1) \\
 30 \times 96 = 2880 \\
 -1 \times 96 = -96 \\
 \hline
 2784
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \qquad \qquad 79(80 - 1) \\
 \quad \times 54 \\
 80 \times 54 = 4320 \\
 -1 \times 54 = -54 \\
 \hline
 4266
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7. \qquad \qquad 37 \\
 \quad \times 19(20 - 1) \\
 20 \times 37 = 740 \\
 -1 \times 37 = -37 \\
 \hline
 703
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. \qquad \qquad 87(90 - 3) \\
 \quad \times 22 \\
 90 \times 22 = 1980 \\
 -3 \times 22 = -66 \\
 \hline
 1914
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9. \qquad \qquad 85 \\
 \quad \times 38(40 - 2) \\
 40 \times 85 = 3400 \\
 -2 \times 85 = -170 \\
 \hline
 3230
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10. \qquad \qquad 57 \\
 \quad \times 39(40 - 1) \\
 40 \times 57 = 2280 \\
 -1 \times 57 = -57 \\
 \hline
 2223
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11. \qquad \qquad 88 \\
 \quad \times 49(50 - 1) \\
 50 \times 88 = 4400 \\
 -1 \times 88 = -88 \\
 \hline
 4312
 \end{array}$$

Problemas de multiplicación con el método de factorización 2 por 2 ([esta página](#))

1. $27 \times 14 = 27 \times 7 \times 2 = 189 \times 2 = 378$ o $14 \times 27 = 14 \times 9 \times 3 = 126 \times 3 = 378$
2. $86 \times 28 = 86 \times 7 \times 4 = 602 \times 4 = 2408$
3. $57 \times 14 = 57 \times 7 \times 2 = 399 \times 2 = 798$
4. $81 \times 48 = 81 \times 8 \times 6 = 648 \times 6 = 3888$ o $48 \times 81 = 48 \times 9 \times 9 = 432 \times 9 = 3888$
5. $56 \times 29 = 29 \times 7 \times 8 = 203 \times 8 = 1624$

$$6. 83 \times 18 = 83 \times 6 \times 3 = 498 \times 3 = 1494$$

$$7. 72 \times 17 = 17 \times 9 \times 8 = 153 \times 8 = 1224$$

$$8. 85 \times 42 = 85 \times 6 \times 7 = 510 \times 7 = 3570$$

$$9. 33 \times 16 = 33 \times 8 \times 2 = 264 \times 2 = 528 \text{ o } 16 \times 33 = 16 \times 11 \times 3 = 176 \times 3 = 528$$

$$10. 62 \times 77 = 62 \times 11 \times 7 = 682 \times 7 = 4774$$

$$11. 45 \times 36 = 45 \times 6 \times 6 = 270 \times 6 = 1620 \text{ o } 45 \times 36 = 45 \times 9 \times 4 = 405 \times 4 = 1620 \text{ o } 36 \times 45 = 36 \times 9 \times 5 = 324 \times 5 = 1620 \text{ o } 36 \times 45 = 36 \times 5 \times 9 = 180 \times 9 = 1620$$

$$12. 37 \times 48 = 37 \times 8 \times 6 = 296 \times 6 = 1776$$

Multiplicación general 2 por 2: ¡todo vale! ([esta página](#))

$$\begin{array}{r} 1. \quad \quad \quad 53 \\ \quad \quad \quad \times 39 \text{ (40 - 1)} \\ \hline 40 \times 53 = 2120 \\ -1 \times 53 = -53 \\ \hline 2067 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{or} \quad \quad \quad 53 \text{ (50 + 3)} \\ \quad \quad \quad \times 39 \\ \hline 50 \times 39 = 1950 \\ 3 \times 39 = +117 \\ \hline 2067 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad \quad \quad 81 \text{ (80 + 1)} \\ \quad \quad \quad \times 57 \\ \hline 80 \times 57 = 4560 \\ 1 \times 57 = +57 \\ \hline 4617 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{or } 57 \times 81 = 57 \times 9 \times 9 = \\ 513 \times 9 = 4617 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad 73 \\ \times 18 \text{ (9 \times 2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \times 18 = 73 \times 9 \times 2 = 657 \times 2 = 1314 \text{ or} \\ 73 \times 18 = 73 \times 6 \times 3 = 438 \times 3 = 1314 \end{array}$$

4. $89(90 - 1)$ or $89 \times 55 = 89 \times 11 \times 5 =$

$$\begin{array}{r} \times 55 \\ 90 \times 55 = 4950 \\ 1 \times 55 = \underline{-55} \\ 4895 \end{array}$$

 $979 \times 5 = 4895$

5. 77 $77 \times 36 = 77 \times 4 \times 9 = 308 \times 9 = 2772$ or
 $\times 36 (4 \times 9)$ $77 \times 36 = 77 \times 9 \times 4 = 693 \times 4 = 2772$

6. 92 $\times 53 (50 + 3)$

$$\begin{array}{r} 50 \times 92 = 4600 \\ 3 \times 92 = \underline{+276} \\ 4876 \end{array}$$

7. 87^2 $\begin{array}{c} +3 \\ -3 \end{array}$ $\begin{array}{c} 90 \\ 84 \end{array}$ $7560 + 3^2 = 7569$

8. 67 $\times 58 (60 - 2)$

$$\begin{array}{r} 60 \times 67 = 4020 \\ -2 \times 67 = \underline{-134} \\ 3886 \end{array}$$

9. $56 (8 \times 7)$ $37 \times 56 = 37 \times 8 \times 7 = 296 \times 7 = 2072$ or
 $\times 37$ $37 \times 56 = 37 \times 7 \times 8 = 259 \times 8 = 2072$

10. 59 or $59 (60 - 1)$

$$\begin{array}{r} \times 21 (20 + 1) \\ 20 \times 59 = 1180 \\ 1 \times 59 = \underline{+59} \\ 1239 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 60 \times 21 = 1260 \\ -1 \times 21 = \underline{-21} \\ 1239 \end{array}$$

or $59 \times 21 = 59 \times 7 \times 3 = 413 \times 3 = 1239$

11. 37 $\times 72 (9 \times 8)$ $37 \times 9 \times 8 = 333 \times 8 = 2664$

12. 57 $\times 73 (70 + 3)$

$$\begin{array}{r} 70 \times 57 = 3990 \\ 3 \times 57 = \underline{+171} \\ 4161 \end{array}$$

13. 38

$$\times 63 \ (9 \times 7)$$

$$38 \times 63 = 38 \times 9 \times 7 =$$

$$342 \times 7 = 2394$$

14.

43 (40 + 3)

$$\times 76$$

$$40 \times 76 = 3040$$

$$3 \times 76 = + 228$$

$$3268$$

15. 43

$$\times 75 \ (5 \times 5 \times 3)$$

$$43 \times 75 = 43 \times 5 \times 5 \times 3 =$$

$$215 \times 5 \times 3 = 1075 \times 3 = 3225$$

16.

74

$$\times 62 \ (60 + 2)$$

$$60 \times 74 = 4440$$

$$2 \times 74 = + 148$$

$$4588$$

17.

61 (60 + 1)

$$\times 37$$

$$60 \times 37 = 2220$$

$$1 \times 37 = + 37$$

$$2257$$

18.

36 (6 × 6)

$$\times 41$$

$$41 \times 36 = 41 \times 6 \times 6 =$$

$$246 \times 6 = 1476$$

19. 54 (9 × 6)

$$\times 53$$

$$54 \times 53 = 53 \times 9 \times 6 =$$

$$477 \times 6 = 2862$$

20. $53^2 \begin{matrix} \nearrow +3 \\ \searrow -3 \end{matrix} \begin{matrix} 56 \\ 50 \end{matrix} \rightarrow 2800 + 3^2 = 2809$

21.

83 (80 + 3)

$$\times 58$$

$$80 \times 58 = 4640$$

$$3 \times 58 = + 174$$

$$4814$$

22.

91 (90 + 1)

$$\times 46$$

$$90 \times 46 = 4140$$

$$1 \times 46 = + 46$$

$$4186$$

23.

52 (50 + 2)

$$\times 47$$

$$50 \times 47 = 2350$$

$$2 \times 47 = + 94$$

$$2444$$

24.

29 (30 - 1)

$$\times 26$$

$$30 \times 26 = 780$$

$$-1 \times 26 = - 26$$

$$754$$

$$25. \quad \begin{array}{r} 41 \\ \times 15 \quad (5 \times 3) \end{array}$$

$$41 \times 15 = 41 \times 5 \times 3 =$$

$$205 \times 3 = 615$$

$$27. \quad \begin{array}{r} 34 \\ \times 27 \quad (9 \times 3) \end{array}$$

$$34 \times 27 = 34 \times 9 \times 3 =$$

$$306 \times 3 = 918$$

$$29. \quad \begin{array}{r} 95 \\ \times 81 \quad (9 \times 9) \end{array}$$

$$95 \times 81 = 95 \times 9 \times 9 =$$

$$855 \times 9 = 7695$$

$$31. \quad \begin{array}{r} 65 \\ \times 69 \quad (70 - 1) \end{array}$$

$$70 \times 65 = 4550$$

$$-1 \times 65 = -65$$

$$4485$$

$$33. \quad \begin{array}{r} 41 \quad (40 + 1) \\ \times 93 \end{array}$$

$$40 \times 93 = 3720$$

$$1 \times 93 = +93$$

$$3813$$

$$26. \quad \begin{array}{r} 65 \\ \times 19 \quad (20 - 1) \end{array}$$

$$20 \times 65 = 1300$$

$$-1 \times 65 = -65$$

$$1235$$

$$28. \quad \begin{array}{r} 69 \quad (70 - 1) \\ \times 78 \end{array}$$

$$70 \times 78 = 5460$$

$$-1 \times 78 = -78$$

$$5382$$

$$30. \quad \begin{array}{r} 65 \quad (60 + 5) \\ \times 47 \end{array}$$

$$60 \times 47 = 2820$$

$$5 \times 47 = +235$$

$$3055$$

$$32. \quad \begin{array}{r} 95 \\ \times 26 \quad (20 + 6) \end{array}$$

$$20 \times 95 = 1900$$

$$6 \times 95 = +570$$

$$2470$$

Cuadrados de tres dígitos ([esta página](#))

$$1. \quad 409^2 \begin{array}{l} \nearrow +9 \quad 418 \\ \searrow -9 \quad 400 \end{array} \rightarrow 167,200 + 9^2 = 167,281$$

$$2. \quad 805^2 \begin{array}{l} \nearrow +5 \quad 810 \\ \searrow -5 \quad 800 \end{array} \rightarrow 648,000 + 5^2 = 648,025$$

3. 217^2 $\begin{matrix} +17 \rightarrow 234 \\ -17 \rightarrow 200 \end{matrix}$ $\rightarrow 46,800 + 17^2 = 47,089$

$\begin{matrix} +3 \rightarrow 20 \\ 17^2 \rightarrow 14 \\ -3 \end{matrix}$ $\rightarrow 280 + 3^2 = 289$

4. 896^2 $\begin{matrix} +4 \rightarrow 900 \\ -4 \rightarrow 892 \end{matrix}$ $\rightarrow 802,800 + 4^2 = 802,816$

5. 345^2 $\begin{matrix} +45 \rightarrow 390 \\ -45 \rightarrow 300 \end{matrix}$ $\rightarrow 117,000 + 45^2 = 119,025$

$\begin{matrix} +5 \rightarrow 50 \\ 45^2 \rightarrow 40 \\ -5 \end{matrix}$ $\rightarrow 2,000 + 5^2 = 2025$

6. 346^2 $\begin{matrix} +46 \rightarrow 392 \\ -46 \rightarrow 300 \end{matrix}$ $\rightarrow 117,600 + 46^2 = 119,716$

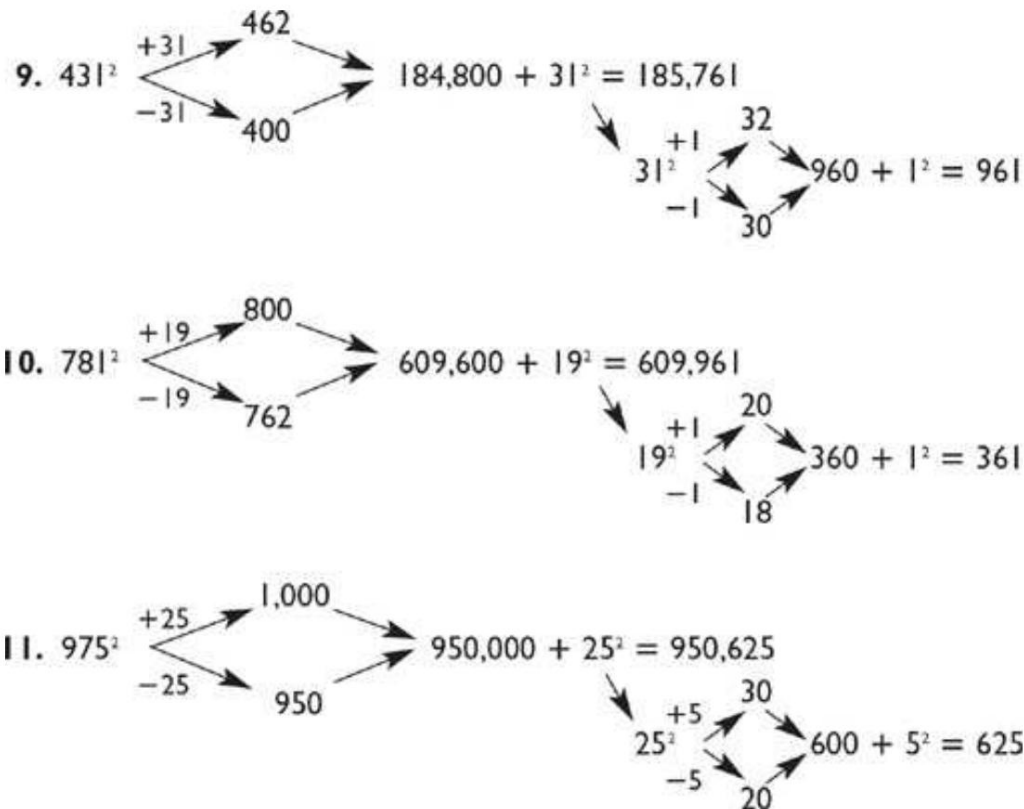
$\begin{matrix} +4 \rightarrow 50 \\ 46^2 \rightarrow 42 \\ -4 \end{matrix}$ $\rightarrow 2,100 + 4^2 = 2116$

7. 276^2 $\begin{matrix} +24 \rightarrow 300 \\ -24 \rightarrow 252 \end{matrix}$ $\rightarrow 75,600 + 24^2 = 76,176$

$\begin{matrix} +4 \rightarrow 28 \\ 24^2 \rightarrow 20 \\ -4 \end{matrix}$ $\rightarrow 560 + 4^2 = 576$

8. 682^2 $\begin{matrix} +18 \rightarrow 700 \\ -18 \rightarrow 664 \end{matrix}$ $\rightarrow 464,800 + 18^2 = 465,124$

$\begin{matrix} +2 \rightarrow 20 \\ 18^2 \rightarrow 16 \\ -2 \end{matrix}$ $\rightarrow 320 + 2^2 = 324$



Cubos de dos dígitos ([esta página](#))

1. $123 = (10 \times 12 \times 14) + (22 \times 12) = 1680 + 48 = 1728$
2. $173 = (14 \times 17 \times 20) + (32 \times 17) = 4760 + 54 = 4814$
3. $213 = (20 \times 21 \times 22) + (12 \times 21) = 9240 + 21 = 9261$
4. $283 = (26 \times 28 \times 30) + (22 \times 28) = 21,840 + 112 = 21,952$
5. $333 = (30 \times 33 \times 36) + (32 \times 33) = 35,640 + 297 = 35,937$
6. $393 = (38 \times 39 \times 40) + (12 \times 39) = 59,280 + 39 = 59,319$
7. $403 = 40 \times 40 \times 40 = 64,000$
8. $443 = (40 \times 44 \times 48) + (42 \times 44) = 84,480 + 1848 = 86,328$
9. $523 = (50 \times 52 \times 54) + (22 \times 52) = 140,400 + 208 = 140,608$
10. $563 = (52 \times 56 \times 60) + (42 \times 56) = 174,720 + 896 = 175,616$
11. $653 = (60 \times 65 \times 70) + (52 \times 65) = 273,000 + 1,625 = 274,625$
12. $713 = (70 \times 71 \times 72) + (12 \times 71) = 357,840 + 71 = 357,911$
13. $783 = (76 \times 78 \times 80) + (22 \times 78) = 474,240 + 312 = 474,552$
14. $853 = (80 \times 85 \times 90) + (52 \times 85) = 612,000 + 2,125 = 614,125$
15. $873 = (84 \times 87 \times 90) + (32 \times 87) = 657,720 + 783 = 658,503$
16. $993 = (98 \times 99 \times 100) + (12 \times 99) = 970,200 + 99 = 970,299$

CAPÍTULO 4: DIVIDE Y CONQUISTA

División de un dígito ([esta página](#))

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 35\frac{1}{9} \\
 9 \overline{)318} \\
 \underline{- 27} \\
 48 \\
 \underline{- 45} \\
 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad 145\frac{1}{5} \\
 5 \overline{)726} \\
 \underline{- 5} \\
 22 \\
 \underline{- 20} \\
 26 \\
 \underline{- 25} \\
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad 61\frac{1}{7} \\
 7 \overline{)428} \\
 \underline{- 42} \\
 08 \\
 \underline{- 7} \\
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad 36\frac{1}{8} \\
 8 \overline{)289} \\
 \underline{- 24} \\
 49 \\
 \underline{- 48} \\
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad 442\frac{2}{3} \\
 3 \overline{)1328} \\
 \underline{- 12} \\
 \underline{- 12} \\
 08 \\
 \underline{- 6} \\
 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad 695\frac{3}{4} \\
 4 \overline{)2782} \\
 \underline{- 24} \\
 38 \\
 \underline{- 36} \\
 22 \\
 \underline{- 20} \\
 2
 \end{array}$$

División de dos dígitos ([esta página](#))

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 43\frac{7}{17} \\
 17 \overline{)738} \\
 \underline{- 68} \\
 58 \\
 \underline{- 51} \\
 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad 24\frac{15}{24} \\
 24 \overline{)591} \\
 \underline{- 48} \\
 111 \\
 \underline{- 96} \\
 15
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad 4\frac{5}{79} \\
 79 \overline{)321} \\
 \underline{- 316} \\
 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad 152\frac{12}{28} \\
 28 \overline{)4268} \\
 \underline{- 28} \\
 146 \\
 \underline{- 140} \\
 68 \\
 \underline{- 56} \\
 12
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad 655\frac{9}{11} \\
 11 \overline{)7214} \\
 \underline{- 66} \\
 61 \\
 \underline{- 55} \\
 64 \\
 \underline{- 55} \\
 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad 170\frac{14}{18} \\
 18 \overline{)3074} \\
 \underline{- 18} \\
 127 \\
 \underline{- 126} \\
 14
 \end{array}$$

Decimalización ([esta página](#))

$$\begin{array}{llll}
 1. \quad \frac{2}{5} = .40 & 2. \quad \frac{4}{7} = .571428 & 3. \quad \frac{3}{8} = .375 & 4. \quad \frac{9}{12} = .75 \\
 5. \quad \frac{5}{12} = .4166 & 6. \quad \frac{6}{11} = .5454 & 7. \quad \frac{14}{24} = .5833 & 8. \quad \frac{13}{27} = .481 \\
 9. \quad \frac{18}{48} = .375 & 10. \quad \frac{10}{14} = .714285 & 11. \quad \frac{6}{32} = .1875 & 12. \quad \frac{19}{45} = .422
 \end{array}$$

Prueba de divisibilidad ([esta página](#))

Divisibility by 2

1. 53,428

Yes

2. 293

No

3. 7241

No

4. 9846

Yes

Divisibility by 4

5. 3932

Yes

6. 67,348

Yes

7. 358

No

8. 57,929

No

Divisibility by 8

9. 59,366

No

10. 73,488

Yes

11. 248

Yes

12. 6111

No

Divisibility by 3

13. 83,671

No: $8 + 3 + 6 + 7 + 1 = 25$

14. 94,737

Yes: $9 + 4 + 7 + 3 + 7 = 30$

15. 7359

Yes: $7 + 3 + 5 + 9 = 24$

16. 3,267,486

Yes: $3 + 2 + 6 + 7 + 4 + 8 + 6 = 36$

Divisibility by 6

17. 5334

Yes: $5 + 3 + 3 + 4 = 15$

18. 67,386

Yes: $6 + 7 + 3 + 8 + 6 = 30$

19. 248

No: $2 + 4 + 8 = 14$

20. 5991

No: odd

Divisibility by 9

21. 1234

No: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

22. 8469

Yes: $8 + 4 + 6 + 9 = 27$

23. 4,425,575

$$\text{No: } 4 + 4 + 2 + 5 + 5 + 7 + 5 = 32$$

24. 314,159,265

$$\text{Yes: } 3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 9 + 2 + 6 + 5 = 36$$

Divisibility by 5

25. 47,830

Yes

26. 43,762

No

27. 56,785

Yes

28. 37,210

Yes

Divisibility by 11

29. 53,867

$$\text{Yes: } 5 - 3 + 8 - 6 + 7 = 11$$

30. 4969

$$\text{No: } 4 - 9 + 6 - 9 = -8$$

31. 3828

$$\text{Yes: } 3 - 8 + 2 - 8 = -11$$

32. 941,369

$$\text{Yes: } 9 - 4 + 1 - 3 + 6 - 9 = 0$$

Divisibility by 7

33. 5784

$$\text{No: } 5784 - 7 = 5777$$

$$577 - 7 = 570$$

$$57$$

34. 7336

$$\text{Yes: } 7336 + 14 = 7350$$

$$735 - 35 = 700$$

$$7$$

35. 875

$$\text{Yes: } 875 - 35 = 840$$

$$84 - 14 = 70$$

$$7$$

36. 1183

$$\text{Yes: } 1183 + 7 = 1190$$

$$119 + 21 = 140$$

$$14$$

Divisibility by 17

37. 694

$$\text{No: } 694 - 34 = 660$$

$$66$$

38. 629

$$\text{Yes: } 629 + 51 = 680$$

$$68$$

39. 8273

$$\text{No: } 8273 + 17 = 8290$$

$$829 + 51 = 880$$

$$88$$

40. 13,855

$$\text{Yes: } 13,855 + 85 = 13,940$$

$$1394 - 34 = 1360$$

$$136 + 34 = 170$$

$$17$$

Multiplicar fracciones ([esta página](#))

1. $\frac{6}{35}$

2. $\frac{44}{63}$

3. $\frac{18}{28} = \frac{9}{14}$

4. $\frac{63}{80}$

División de fracciones ([esta página](#))

1. $\frac{4}{5}$

2. $\frac{5}{18}$

3. $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Simplificación de fracciones ([esta página](#))

$$1. \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

$$2. \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

$$3. \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

$$4. \frac{5}{2} = \frac{30}{12}$$

$$5. \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$6. \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$7. \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

$$8. \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Sumar fracciones (denominadores iguales) ([esta página](#))

$$1. \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

$$2. \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$3. \frac{5}{18} + \frac{6}{18} = \frac{11}{18}$$

$$4. \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Sumar fracciones (denominadores desiguales) ([esta página](#))

$$1. \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$2. \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{3}{18} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$3. \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

$$4. \frac{2}{7} + \frac{5}{21} = \frac{6}{21} + \frac{5}{21} = \frac{11}{21}$$

$$5. \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$$

$$6. \frac{3}{7} + \frac{3}{5} = \frac{15}{35} + \frac{21}{35} = \frac{36}{35}$$

$$7. \frac{2}{11} + \frac{5}{9} = \frac{18}{99} + \frac{55}{99} = \frac{73}{99}$$

Restar fracciones ([esta página](#))

$$1. \frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{5}{11}$$

$$2. \frac{12}{7} - \frac{8}{7} = \frac{4}{7}$$

$$3. \frac{13}{18} - \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$4. \frac{4}{5} - \frac{1}{15} = \frac{12}{15} - \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$$

$$5. \frac{9}{10} - \frac{3}{5} = \frac{9}{10} - \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$$

$$6. \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

$$7. \frac{7}{8} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} - \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

$$8. \frac{4}{7} - \frac{2}{5} = \frac{20}{35} - \frac{14}{35} = \frac{6}{35}$$

$$9. \frac{8}{9} - \frac{1}{2} = \frac{16}{18} - \frac{9}{18} = \frac{7}{18}$$

CAPÍTULO 5: SUFICIENTEMENTE BUENO

Suma de conjeturas ([esta página](#))*Exact*

1.	1479	2.	57,293	3.	312,025	4.	8,971,011
	<u>+ 1105</u>		<u>+ 37,421</u>		<u>+ 79,419</u>		<u>+ 4,016,367</u>
	2584		94,714		391,444		12,987,378

Guesstimates

1.	1500	or	1480	2.	57,000	or	57,300
	<u>+ 1100</u>		<u>+ 1100</u>		<u>+ 37,000</u>		<u>+ 37,400</u>
	2600		2580		94,000		94,700
3.	310,000	or	312,000	4.	9 million	or	8.9 million
	<u>+ 80,000</u>		<u>+ 79,000</u>		<u>+ 4 million</u>		<u>+ 4.0 million</u>
	390,000		391,000		13 million		12.9 million
				or	8.97 million		
					<u>+ 4.02 million</u>		
					12.99 million		

Exact

\$ 2.67
1.95
7.35
9.21
0.49
11.21
0.12
6.14
8.31
\$47.35

Guesstimates

\$ 2.50
2.00
7.50
9.00
0.50
11.00
0.00
6.00
8.50
\$47.00

Adivinación de restas ([esta página](#))

Exact

1.	$\begin{array}{r} 4926 \\ - 1659 \\ \hline 3267 \end{array}$	2.	$\begin{array}{r} 67,221 \\ - 9,874 \\ \hline 57,347 \end{array}$	3.	$\begin{array}{r} 526,978 \\ - 42,009 \\ \hline 484,969 \end{array}$	4.	$\begin{array}{r} 8,349,241 \\ - 6,103,839 \\ \hline 2,245,402 \end{array}$
----	--	----	---	----	--	----	---

Guesstimates

1.	$\begin{array}{r} 4900 \\ - 1700 \\ \hline 3200 \end{array}$	2.	$\begin{array}{r} 67,000 \text{ or } 67,200 \\ - 10,000 \\ \hline 57,000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 67,200 \\ - 9,900 \\ \hline 57,300 \end{array}$	
3.	$\begin{array}{r} 530,000 \text{ or } 527,000 \\ - 40,000 \\ \hline 490,000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 527,000 \\ - 42,000 \\ \hline 485,000 \end{array}$	4.	$\begin{array}{r} 8.3 \text{ million or } 8.35 \text{ million} \\ - 6.1 \text{ million} \\ \hline 2.2 \text{ million} \end{array}$	$\begin{array}{r} 8.35 \text{ million} \\ - 6.10 \text{ million} \\ \hline 2.25 \text{ million} \end{array}$

Adivinación de división ([esta página](#))*Exact*

1.	$\begin{array}{r} 625.57 \\ 7 \overline{)4379} \end{array}$	2.	$\begin{array}{r} 4,791.6 \\ 5 \overline{)23,958} \end{array}$	3.	$\begin{array}{r} 42,247.15 \\ 13 \overline{)549,213} \end{array}$
4.	$\begin{array}{r} 17,655.21 \\ 289 \overline{)5,102,357} \end{array}$	5.	$\begin{array}{r} 40.90 \\ 203,637 \overline{)8,329,483} \end{array}$		

Guesstimates

1.	$\begin{array}{r} 630 \\ 7 \overline{)4400} \end{array}$	2.	$\begin{array}{r} 4,800 \\ 5 \overline{)24,000} \end{array}$	3.	$\begin{array}{r} 42,000 \\ 13 \overline{)550,000} \end{array}$
4.	$\begin{array}{r} 17,000 \\ \approx 300 \overline{)5,100,000} = 3 \overline{)51,000} \end{array}$	5.	$\begin{array}{r} 40 \\ \approx 200,000 \overline{)8,000,000} = 200 \overline{)8000} \end{array}$		

Adivinación de multiplicaciones ([esta página](#))*Exact*

1.	$\begin{array}{r} 98 \\ \times 27 \\ \hline 2646 \end{array}$	2.	$\begin{array}{r} 76 \\ \times 42 \\ \hline 3192 \end{array}$	3.	$\begin{array}{r} 88 \\ \times 88 \\ \hline 7744 \end{array}$	4.	$\begin{array}{r} 539 \\ \times 17 \\ \hline 9163 \end{array}$
5.	$\begin{array}{r} 312 \\ \times 98 \\ \hline 30,576 \end{array}$	6.	$\begin{array}{r} 639 \\ \times 107 \\ \hline 68,373 \end{array}$	7.	$\begin{array}{r} 428 \\ \times 313 \\ \hline 133,964 \end{array}$	8.	$\begin{array}{r} 51,276 \\ \times 489 \\ \hline 25,073,964 \end{array}$

$$\begin{array}{r}
 9. \quad 104,972 \\
 \times \quad 11,201 \\
 \hline
 1,175,791,372
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10. \quad 5,462,741 \\
 \times \quad 203,413 \\
 \hline
 1,111,192,535,033
 \end{array}$$

Guesstimates

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 100 \\
 \times \quad 25 \\
 \hline
 2500
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad 78 \\
 \times \quad 40 \\
 \hline
 3120
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad 90 \\
 \times \quad 86 \\
 \hline
 7740
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad 540 \\
 \times \quad 17 \\
 \hline
 9180
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad 310 \\
 \times \quad 100 \\
 \hline
 31,000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad 646 \quad \text{or} \quad 640 \\
 \times \quad 100 \quad \quad \times \quad 110 \\
 \hline
 64,600 \quad \quad 70,400
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7. \quad 430 \\
 \times \quad 310 \\
 \hline
 133,300
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. \quad 51,000 \\
 \times \quad 490 \\
 \hline
 24,990,000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9. \quad 105,000 \\
 \times \quad 11,000 \\
 \hline
 1155 \text{ million} \\
 = 1.155 \text{ billion}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10. \quad 5,500,000 \\
 \times \quad 200,00 \\
 \hline
 1100 \text{ billion} \\
 = 1.1 \text{ trillion}
 \end{array}$$

Estimación de raíz cuadrada ([esta página](#))

Exact (to two decimal places)

$$1. \quad \frac{4.12}{\sqrt{17}} \quad 2. \quad \frac{5.91}{\sqrt{35}} \quad 3. \quad \frac{12.76}{\sqrt{163}} \quad 4. \quad \frac{65.41}{\sqrt{4279}} \quad 5. \quad \frac{89.66}{\sqrt{8039}}$$

Divide and Average

$$1. \quad \frac{4.2}{4 \overline{)17}} \quad \frac{4 + 4.2}{2} = 4.1$$

$$2. \quad \frac{5.8}{6 \overline{)35}} \quad \frac{6 + 5.8}{2} = 5.9$$

$$3. \quad \frac{16.3}{10 \overline{)163}} \quad \frac{10 + 16.3}{2} = 13.15$$

$$4. \quad \frac{71}{60 \overline{)4279}} \quad \frac{60 + 71}{2} = 65.5$$

$$5. \quad \frac{89}{90 \overline{)8039}} \quad \frac{90 + 89}{2} = 89.5$$

Matemáticas cotidianas ([esta página](#))

$$1. \quad \$8,80 + \$4,40 = \$13,20$$

$$2. \quad \$5,30 + \$2,65 = \$7,95$$

$$3. \quad \$74 \div 2 \div 2 = \$37 \div 2 = \$18,50$$

$$4. \quad \text{Como } 70 \div 10 = 7, \text{ siete años } 5.$$

Como $70 \div 6 = 11,67$, se necesitarán doce años para duplicar 6.

Como $110 \div 7 = 15,714$, se necesitarán dieciséis años para triplicar

7. Como $70 \div 7 = 10$, se necesitarán diez años para duplicarse, luego otros diez años para duplicarse de nuevo. Por tanto, se necesitarán veinte años para cuadruplicarse.

$$8. \quad M = \frac{\$100,000(0.0075)(1.0075)^{120}}{(1.00333)^{120} - 1} = \frac{\$750(2.451)}{1.451} = \$1267$$

$$9. \quad M = \frac{\$30,000(0.004167)(1.004167)^{42}}{(1.004167)^{42} - 1} = \frac{\$125(1.22)}{0.22} = \$693$$

CAPÍTULO 6: MATEMÁTICAS PARA EL TABLERO

Columnas de números ([esta página](#))

1.	672 → 6	2.	\$ 21.56 → 5
	1,367 → 8		19.38 → 3
	107 → 8		211.02 → 6
	7,845 → 6		9.16 → 7
	358 → 7		26.17 → 7
	210 → 3		<u>1.43 → 3</u>
	<u>+ 916 → 7</u>		\$288.72 → 9
	11,475 → 9		

Restar en papel ([esta página](#))

1.	75,423 → 3	2.	876,452 → 5
	<u>- 46,298 → 2</u>		<u>- 593,876 → 2</u>
	29,125 → 1		282,576 → 3
3.	3,249,202 → 4	4.	45,394,358 → 5
	<u>- 2,903,445 → 9</u>		<u>- 36,472,659 → 6</u>
	345,757 → 4		8,921,699 → 8

Estimación de raíz cuadrada ([esta página](#))

$$\begin{array}{r}
 1. \quad \begin{array}{r} 3.87 \\ \sqrt{15.0000} \\ 3^2 = 9 \\ \hline 600 \\ 68 \times 8 = 544 \\ \hline 5600 \\ 767 \times 7 = 5369 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad \begin{array}{r} 22.40 \\ \sqrt{502.0000} \\ 2^2 = 4 \\ \hline 102 \\ 42 \times 2 = 84 \\ \hline 1800 \\ 444 \times 4 = 1776 \\ \hline 2400 \\ 4480 \times 0 = 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad \begin{array}{r} 20.95 \\ \sqrt{439.2000} \\ 2^2 = 4 \\ \hline 039 \\ 40 \times 0 = 0 \\ \hline 3920 \\ 409 \times 9 = 3681 \\ \hline 23900 \\ 4480 \times 0 = 20925 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad \begin{array}{r} 19 \text{ exactly} \\ \sqrt{361} \\ 1^2 = 1 \\ \hline 261 \\ 29 \times 9 = 261 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

Multiplicación con lápiz y papel ([esta página](#))

$$\begin{array}{r}
 1. \quad \begin{array}{r} 54 \rightarrow 9 \\ \times 37 \rightarrow 1 \\ \hline 1998 \rightarrow 9 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad \begin{array}{r} 273 \rightarrow 3 \\ \times 217 \rightarrow 1 \\ \hline 59,241 \rightarrow 3 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad \begin{array}{r} 725 \rightarrow 5 \\ \times 609 \rightarrow 6 \\ \hline 441,525 \rightarrow 3 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad \begin{array}{r} 3,309 \rightarrow 6 \\ \times 2,868 \rightarrow 6 \\ \hline 9,490,212 \rightarrow 9 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad \begin{array}{r} 52,819 \rightarrow 7 \\ \times 47,820 \rightarrow 3 \\ \hline 2,525,804,580 \rightarrow 3 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad \begin{array}{r} 3,923,759 \rightarrow 3 \\ \times 2,674,093 \rightarrow 4 \\ \hline 10,492,496,475,587 \rightarrow 3 \end{array}
 \end{array}$$

CAPÍTULO 8: LO DIFÍCIL HECHO FÁCIL

Cuadrados de cuatro dígitos ([esta página](#))

1. $1,234^2$ "Reach off"

$$\begin{array}{r} +234 \\ 1,234 \\ -234 \\ \hline 1,000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,468 \\ + \\ 54,756 \\ \hline 1,522,756 \end{array} \quad (234^2) \leftarrow \begin{array}{r} +34 \\ 268 \\ -34 \\ \hline 200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 53,600 \\ + 1,156 \quad (34^2) \\ \hline 54,756 \end{array}$$

2. $8,639^2$ "Lesson"

$$\begin{array}{r} +361 \\ 8,639 \\ -361 \\ \hline 8,278 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9,000 \\ + \\ 130,321 \\ \hline 74,632,321 \end{array} \quad (361^2) \leftarrow \begin{array}{r} +39 \\ 400 \\ -39 \\ \hline 322 \end{array} \quad \begin{array}{r} 128,800 \\ + 1,521 \quad (39^2) \\ \hline 130,321 \end{array}$$

3. $5,312^2$ "Tons"

$$\begin{array}{r} +312 \\ 5,312 \\ -312 \\ \hline 5,000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5,624 \\ + \\ 97,344 \\ \hline 28,217,344 \end{array} \quad (312^2) \leftarrow \begin{array}{r} +12 \\ 324 \\ -12 \\ \hline 300 \end{array} \quad \begin{array}{r} 97,200 \\ + 144 \quad (12^2) \\ \hline 97,344 \end{array}$$

4. $9,863^2$ "Nachos"

$$\begin{array}{r} +137 \\ 9,863 \\ -137 \\ \hline 9,726 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10,000 \\ + \\ 18,769 \\ \hline 97,278,769 \end{array} \quad (137^2) \leftarrow \begin{array}{r} +37 \\ 174 \\ -37 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17,400 \\ + 1,369 \quad (37^2) \\ \hline 18,769 \end{array}$$

5. $3,618^2$ "Prayer"

$$\begin{array}{r} +382 \\ 3,618 \\ -382 \\ \hline 3,236 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,000 \\ + \\ 145,924 \\ \hline 13,089,924 \end{array} \quad (382^2) \leftarrow \begin{array}{r} +18 \\ 400 \\ -18 \\ \hline 364 \end{array} \quad \begin{array}{r} 145,600 \\ + 324 \quad (18^2) \\ \hline 145,924 \end{array}$$

6. $2,971^2$ (No mnemonic needed)

$$\begin{array}{r} +29 \\ 2,971 \\ -29 \\ \hline 2,942 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,000 \\ + \\ 841 \quad (29^2) \\ \hline 8,826,841 \end{array}$$

Ejercicios de 3 por 2 que utilizan factorización, suma y resta
Métodos ([esta página](#))

$$\begin{array}{r}
 1. \quad \quad 858 \\
 \times 15 \ (5 \times 3) \\
 \hline
 858 \times 15 = 858 \times 5 \times 3 = \\
 4,290 \times 3 = 12,870
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad \quad 796 \ (800 - 4) \\
 \times 19 \\
 \hline
 800 \times 19 = 15,200 \\
 -4 \times 19 = -76 \\
 \hline
 15,124
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad \quad 148 \\
 \times 62 \ (60 + 2) \\
 \hline
 148 \times 60 = 8,880 \\
 148 \times 2 = + 296 \\
 \hline
 9,176
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{or} \quad 148 \ (74 \times 2) \\
 \times 62 \ (60 + 2) \\
 \hline
 62 \times 148 = 62 \times 74 \times 2 = \\
 4,588 \times 2 = 9,176
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad \quad 773 \\
 \times 42 \ (7 \times 6) \\
 \hline
 773 \times 42 = 773 \times 7 \times 6 = \\
 5,411 \times 6 = 32,466
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad \quad 906 \ (900 + 6) \\
 \times 46 \\
 \hline
 900 \times 46 = 41,400 \\
 6 \times 46 = + 276 \\
 \hline
 41,676
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad \quad 952 \ (950 + 2) \\
 \times 26 \\
 \hline
 950 \times 26 = 24,700 \\
 2 \times 26 = + 52 \\
 \hline
 24,752
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7. \quad \quad 411 \ (410 + 1) \\
 \times 93 \\
 \hline
 410 \times 93 = 38,130 \\
 1 \times 93 = + 93 \\
 \hline
 38,223
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. \quad \quad 967 \\
 \times 51 \ (50 + 1) \\
 \hline
 50 \times 967 = 48,350 \\
 1 \times 967 = + 967 \\
 \hline
 49,317
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9. \quad \quad 484 \\
 \times 75 \ (5 \times 5 \times 3) \\
 \hline
 484 \times 75 = 484 \times 5 \times 5 \times 3 = \\
 2,420 \times 5 \times 3 = 12,100 \times 3 = \\
 36,300
 \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 126 (9 \times 7 \times 2) \\ \times 87 \\ \hline 126 \times 87 = 87 \times 9 \times 7 \times 2 = \\ 783 \times 7 \times 2 = 5,481 \times 2 = \\ 10,962 \end{array}$$
11.
$$\begin{array}{r} 157 \\ \times 33 (11 \times 3) \\ \hline 157 \times 33 = 157 \times 11 \times 3 = \\ 1727 \times 3 = 5181 \end{array}$$
12.
$$\begin{array}{r} 616 (610 + 6) \\ \times 37 \\ \hline 610 \times 37 = 22,570 \\ 6 \times 37 = + 222 \\ \hline 22,792 \end{array}$$
13.
$$\begin{array}{r} 841 \\ \times 72 (9 \times 8) \\ \hline 841 \times 72 = 841 \times 9 \times 8 = \\ 7,569 \times 8 = 60,552 \end{array}$$
14.
$$\begin{array}{r} 361 (360 + 1) \\ \times 41 \\ \hline 360 \times 41 = 14,760 \\ 1 \times 41 = + 41 \\ \hline 14,801 \end{array}$$
15.
$$\begin{array}{r} 218 \\ \times 68 (70 - 2) \\ \hline 70 \times 218 = 15,260 \\ -2 \times 218 = - 436 \\ \hline 14,824 \end{array}$$
16.
$$\begin{array}{r} 538 (540 - 2) \text{ or } 538 (530 + 8) \\ \times 53 \\ \hline 540 \times 53 = 28,620 \\ -2 \times 53 = - 106 \\ \hline 28,514 \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} 538 (530 + 8) \\ \times 53 \\ \hline 530 \times 53 = 28,090 \\ 8 \times 53 = + 424 \\ \hline 28,514 \end{array}$$
17.
$$\begin{array}{r} 817 \\ \times 61 (60 + 1) \\ \hline 60 \times 817 = 49,020 \\ 1 \times 817 = + 817 \\ \hline 49,837 \end{array}$$
18.
$$\begin{array}{r} 668 \\ \times 63 (9 \times 7) \\ \hline 668 \times 63 = 668 \times 9 \times 7 = \\ 6,012 \times 7 = 42,084 \end{array}$$
19.
$$\begin{array}{r} 499 (500 - 1) \\ \times 25 \\ \hline 500 \times 25 = 12,500 \\ -1 \times 25 = - 25 \\ \hline 12,475 \end{array}$$
20.
$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 56 (7 \times 8) \\ \hline 144 \times 56 = 144 \times 7 \times 8 = \\ 1008 \times 8 = 8064 \end{array}$$

21.
$$\begin{array}{r} 281 \\ \times 44 \text{ (11} \times 4\text{)} \\ \hline 281 \times 44 = 281 \times 11 \times 4 = \\ 3,091 \times 4 = 12,364 \end{array}$$
 or
$$\begin{array}{r} 281 \text{ (280 + 1)} \\ \times 44 \\ \hline 280 \times 44 = 12,320 \\ 1 \times 44 = + 44 \\ \hline 12,364 \end{array}$$
22.
$$\begin{array}{r} 988 \text{ (1000 - 12)} \\ \times 22 \\ \hline 1000 \times 22 = 22,000 \\ -12 \times 22 = - 264 \\ \hline 21,736 \end{array}$$
 23.
$$\begin{array}{r} 383 \\ \times 49 \text{ (7} \times 7\text{)} \\ \hline 383 \times 49 = 383 \times 7 \times 7 = \\ 2,681 \times 7 = 18,767 \end{array}$$
24.
$$\begin{array}{r} 589 \text{ (600 - 11)} \\ \times 87 \\ \hline 600 \times 87 = 52,200 \\ 11 \times -87 = - 957 \\ \hline 51,243 \end{array}$$
 25.
$$\begin{array}{r} 286 \\ \times 64 \text{ (8} \times 8\text{)} \\ \hline 286 \times 64 = 286 \times 8 \times 8 = \\ 2,288 \times 8 = 18,304 \end{array}$$
26.
$$\begin{array}{r} 853 \\ \times 32 \text{ (8} \times 4\text{)} \\ \hline 853 \times 32 = 853 \times 8 \times 4 = \\ 6,824 \times 4 = 27,296 \end{array}$$
 27.
$$\begin{array}{r} 878 \\ \times 24 \text{ (8} \times 3\text{)} \\ \hline 878 \times 24 = 878 \times 8 \times 3 = \\ 7,024 \times 3 = 21,072 \end{array}$$
28.
$$\begin{array}{r} 423 \text{ (47} \times 9\text{)} \\ \times 65 \\ \hline 423 \times 65 = 65 \times 47 \times 9 = \\ 3,055 \times 9 = 27,495 \end{array}$$
 29.
$$\begin{array}{r} 154 \text{ (11} \times 14\text{)} \\ \times 19 \\ \hline 154 \times 19 = 19 \times 11 \times 14 = \\ 209 \times 7 \times 2 = 1463 \times 2 = \\ 2926 \end{array}$$
30.
$$\begin{array}{r} 834 \text{ (800 + 34)} \\ \times 34 \\ \hline 800 \times 34 = 27,200 \\ 34 \times 34 = + 1,156 \\ \hline 28,356 \end{array}$$
 31.
$$\begin{array}{r} 545 \\ \times 27 \text{ (9} \times 3\text{)} \\ \hline 545 \times 27 = 545 \times 9 \times 3 = \\ 4,905 \times 3 = 14,715 \end{array}$$

$$32. \quad 653 (650 + 3)$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 69 \\ 650 \times 69 = 44,850 \\ 3 \times 69 = + \quad 207 \\ \hline 45,057 \end{array}$$

$$33. \quad 216 (6 \times 6 \times 6)$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 78 \\ 216 \times 78 = 78 \times 6 \times 6 \times 6 = \\ 468 \times 6 \times 6 = 2,808 \times 6 = \\ 16,848 \end{array}$$

$$34. \quad 822$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 95 (100 - 5) \\ 100 \times 822 = 82,200 \\ -5 \times 822 = - \quad 4,110 \\ \hline 78,090 \end{array}$$

Cuadrados de cinco dígitos ([esta página](#))

1. $45,795^2$

$$\begin{array}{r}
 795 (800 - 5) \\
 \times \quad 45 \\
 \hline
 800 \times 45 = 36,000 \\
 -5 \times 45 = -225 \\
 \hline
 35,775 \times 2,000 = 71,550,000 \\
 71,550,000 \\
 45,000^2 = + 2,025,000,000 \\
 \hline
 2,096,550,000 \\
 795^2 = + \quad 632,025 \\
 \hline
 2,097,182,025
 \end{array}$$

"Lilies"

$$\begin{array}{r}
 800 \\
 +5 \swarrow \quad \searrow -5 \\
 795^2 \quad 632,000 \\
 \quad \quad \quad 790 \quad + \quad 25 \quad (5^2) \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 632,025
 \end{array}$$

2. $21,231^2$

$$\begin{array}{r}
 231 \\
 \times \quad 21 (7 \times 3) \\
 \hline
 231 \times 7 \times 3 = 1,617 \times 3 = 4,851
 \end{array}$$

"Cousin"

$$\begin{array}{r}
 4,851 \times 2,000 = 9,702,000 \\
 21,000^2 = + 441,000,000 \\
 \hline
 450,702,000 \\
 231^2 = + \quad 53,361 \\
 \hline
 450,755,361
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 262 \\
 +31 \swarrow \quad \searrow -31 \\
 231^2 \quad 52,400 \\
 \quad \quad \quad 200 \quad + \quad 961 \quad (31^2) \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 53,361
 \end{array}$$

3. $58,324^2$

$$\begin{array}{r} 324 (9 \times 6 \times 6) \\ \times \quad 58 \\ \hline \end{array}$$

$$324 \times 58 = 58 \times 9 \times 6 \times 6 = 522 \times 6 \times 6 = 3,132 \times 6 = 18,792$$

"Liver"

$$18,792 \times 2,000 = 37,584,000$$

$$58,000^2 = + 3,364,000,000$$

$$3,401,584,000$$

$$324^2 = + 104,976$$

$$3,401,688,976$$

$$\begin{array}{r} +24 \quad 348 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 324^2 \quad 104,400 (348 \times 300) \\ \nwarrow \quad \swarrow \\ -24 \quad 300 \\ + 576 (24^2) \\ \hline 104,976 \end{array}$$

4. $62,457^2$

$$\begin{array}{r} 457 \\ \times \quad 62 (60 + 2) \\ \hline \end{array}$$

$$60 \times 457 = 27,420$$

$$2 \times 457 = + 914$$

"Judge off"

$$28,334 \times 2,000 = 56,668,000$$

$$56,668,000$$

$$62,000^2 = + 3,844,000,000$$

$$3,900,668,000$$

$$457^2 = + 208,849$$

$$3,900,876,849$$

$$\begin{array}{r} +43 \quad 500 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 457^2 \quad 207,000 (500 \times 414) \\ \nwarrow \quad \swarrow \\ -43 \quad 414 \\ + 1,849 (43^2) \\ \hline 208,849 \end{array}$$

5. $89,854^2$

$$\begin{array}{r}
 854 \\
 \times \quad 89 \quad (90 - 1) \\
 \hline
 90 \times 854 = 76,860 \\
 -1 \times 854 = -854 \\
 \hline
 76,006 \times 2,000 = 152,012,000
 \end{array}$$

"Stone"

$$\begin{array}{r}
 152,012,000 \\
 89,000^2 = + 7,921,012,000 \\
 \hline
 8,073,012,000 \\
 854^2 = + \quad 729,316 \\
 \hline
 8,073,741,316
 \end{array}$$

854^2

$\begin{array}{c} +46 \\ -46 \end{array}$

$\begin{array}{c} 900 \\ 808 \end{array}$

$727,200 \quad (900 \times 808)$
 $+ \quad 2,116 \quad (46^2)$
 $\hline$
 $729,316$

6. $76,934^2$

$$\begin{array}{r}
 934 \quad (930 + 4) \\
 \times \quad 76 \\
 \hline
 930 \times 76 = 70,680 \\
 4 \times 76 = + 304 \\
 \hline
 76,984 \times 2,000 = 141,968,000
 \end{array}$$

"Pie Chief"

$$\begin{array}{r}
 141,968,000 \\
 76,000^2 = + 5,776,000,000 \\
 \hline
 5,917,968,000 \\
 934^2 = + \quad 872,356 \\
 \hline
 5,918,840,356
 \end{array}$$

934^2

$\begin{array}{c} +34 \\ -34 \end{array}$

$\begin{array}{c} 968 \\ 900 \end{array}$

$871,200 \quad (968 \times 900)$
 $+ \quad 1,156 \quad (34^2)$
 $\hline$
 $872,356$

Multiplicación 3 por 3 ([esta página](#))

$$1. \quad \begin{array}{r} 644 (640 + 4) \\ \times 286 \\ \hline \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{r} 644 (7 \times 92) \\ \times 286 \\ \hline \end{array}$$

$$640 \times 286 = 183,040 (8 \times 8 \times 10)$$

$$4 \times 200 = + 800$$

$$183,840$$

$$4 \times 86 = + 344$$

$$184,184$$

$$684 \times 286 = 286 \times 7 \times 92 =$$

$$2,002 \times 92 = 184,184$$

$$2. \quad \begin{array}{r} 596 (600 - 4) \\ \times 167 \\ \hline \end{array} \quad 3. \quad \begin{array}{r} 853 \\ \times 325 (320 + 5) \\ \hline \end{array}$$

$$600 \times 167 = 100,200$$

$$-4 \times 167 = - 668$$

$$99,532$$

$$320 \times 853 = 272,960$$

$$5 \times 800 = + 4,000$$

$$276,960$$

$$5 \times 53 = + 265$$

$$277,225$$

$$4. \quad \begin{array}{r} 343 (7 \times 7 \times 7) \\ \times 226 \\ \hline \end{array}$$

$$343 \times 226 = 226 \times 7 \times 7 \times 7 =$$

$$1,582 \times 7 \times 7 = 11,074 \times 7 =$$

$$77,518$$

$$5. \quad \begin{array}{r} 809 (800 + 9) \\ \times 527 \\ \hline \end{array}$$

$$800 \times 527 = 421,600$$

$$9 \times 527 = + 4,743$$

$$426,343$$

$$6. \quad \begin{array}{r} 942 (+42) \\ \times 879 (-21) \\ \hline \end{array}$$

$$900 \times 921 = 828,900$$

$$-21 \times 42 = - 882$$

$$828,018$$

$$7. \quad \begin{array}{r} 692 (+8) \\ \times 644 (-56) \\ \hline \end{array}$$

$$700 \times 636 = 445,200$$

$$(-8) \times (-56) = + 448$$

$$445,648$$

$$8. \quad \begin{array}{r} 446 \\ \times 176 (11 \times 8 \times 2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9. \quad 658 (47 \times 7 \times 2) \\
 \times \quad 468 (52 \times 9) \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10. \quad 273 (91 \times 3) \\
 \times \quad 138 (46 \times 3) \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11. \quad 824 \\
 \times \quad 206 (412^3) \\
 \hline
 400 \times 424 = 169,600 \\
 12 \times 12 = + \quad 144 \\
 \hline
 169,744
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12. \quad 642 (107 \times 6) \\
 \times \quad 249 (83 \times 3) \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 13. \quad 783 (87 \times 9) \\
 \times \quad 589 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 14. \quad 871 (-29) \\
 \times \quad 926 (+26) \\
 \hline
 900 \times 897 = 807,300 \\
 -29 \times 26 = - \quad 754 \\
 \hline
 806,546
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 15. \quad 341 \\
 \times \quad 715 \\
 \hline
 7 \times 341 = 2,387 \\
 3 \times 15 = + \quad 45 \\
 \hline
 2,432 \times 100 = 243,200 \\
 41 \times 15 = + \quad 615 \\
 \hline
 243,815
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 16. \qquad \qquad \qquad 417 \\
 \qquad \qquad \qquad \times \quad 298 \text{ (300 - 2)} \\
 300 \times 417 = \quad 125,100 \\
 -2 \times 417 = \quad - \quad 834 \\
 \hline
 124,266
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 17. \quad 557 \\
 \times 756 \text{ (9} \times 84)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 18. \qquad \qquad \qquad 976 \text{ (1000 - 24)} \\
 \qquad \qquad \qquad \times \quad 878 \\
 878 \times 1,000 = \quad 878,000 \\
 -878 \times 24 = \quad - \quad 21,072 \\
 \hline
 856,928
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 19. \quad 765 \\
 \times 350 \text{ (7} \times 5 \times 10)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 20. \quad 154 \text{ (11} \times 14) \\
 \times 423 \text{ (47} \times 9)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 21. \qquad \qquad \qquad 545 \text{ (109} \times 5) \\
 \qquad \qquad \qquad \times \quad 834 \\
 100 \times 834 = \quad 83,400 \\
 9 \times 834 = \quad + \quad 7,506 \\
 \hline
 90,906 \times 5 = 454,530
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 22. \quad 216 \text{ (6} \times 6 \times 6) \\
 \times 653
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 23. \qquad \qquad \qquad 393 \text{ (400 - 7)} \\
 \qquad \qquad \qquad \times \quad 822 \\
 400 \times 822 = \quad 328,800 \\
 -7 \times 822 = \quad - \quad 5,754 \\
 \hline
 323,046
 \end{array}$$

Multiplicación 5 por 5 ([esta página](#))

1. $65,154$

$\times 19,423$

"Neck ripple"

$423 \times 65 = 27,495$

$154 \times 19 = + 2,926$

"Mouse round"

$30,421 \times 1,000 = 30,421,000$

$65 \times 19 \times 1 \text{ million} = + 1,235,000,000$

$1,265,421,000$

$154 \times 423 = + 65,142$

$1,265,486,142$

2. $34,545$

$\times 27,834$

"Knife mulch"

$834 \times 34 = 28,356$

$545 \times 27 = + 14,715$

"Room scout"

$43,071 \times 1,000 = 43,071,000$

$34 \times 27 \times 1 \text{ million} = + 918,000,000$

$961,071,000$

$834 \times 545 = + 454,530$

$961,525,530$

3. $69,216$

$\times 78,653$

"Roll silk"

$653 \times 69 = 45,057$

$216 \times 78 = + 16,848$

"Shoot busily"

$61,905 \times 1,000 = 61,905,000$

$69 \times 78 \times 1 \text{ million} = + 5,382,000,000$

$5,443,905,000$

$216 \times 653 = + 141,048$

$5,444,046,048$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad 95,393 \\
 \times 81,822 \\
 \hline
 \end{array}$$

"Cave soups"

$$\begin{array}{r}
 822 \times 95 = 78,090 \\
 393 \times 81 = +31,833 \\
 \hline
 109,923 \times 1,000 = 109,923,000 \\
 95 \times 81 \times 1 \text{ million} = +7,804,000,000 \\
 \hline
 7,804,923,000 \\
 393 \times 822 = +323,046 \\
 \hline
 7,805,246,046
 \end{array}$$

"Toss-up Panama"

Un día para cualquier fecha ([esta página](#))

1. El 19 de enero de 2007 es viernes: $6 + 19 + 1 = 26$; $26 - 21 = 5$
2. El 14 de febrero de 2012 es martes: $1 + 14 + 1 = 16$; $16 - 14 = 2$ 3.
- El 20 de junio de 1993 es domingo: $3 + S + 20 = 28$; $28 - 28 = 0$
4. El 1 de septiembre de 1983 es jueves: $4 + 1 + 6 = 11$; $11 - 7 = 4$
5. El 8 de septiembre de 1954 es miércoles: $4 + 8 + 5 = 17$; $17 - 14 = 3$
6. El 19 de noviembre de 1863 es jueves: $2 + 19 + 4 = 25$; $25 - 21 = 4$ 7.
- El 4 de julio de 1776 es jueves: $5 + 4 + 2 = 11$; $11 - 7 = 4$ 8.
- El 22 de febrero de 2222 es viernes: $2 + 22 + 2 = 26$; $26 - 21 = 5$ 9.
- ¡3 de junio de 1,2468, no existe (sólo 30 días en junio)! Pero el 30 de junio de 2468 es sábado, así que el día siguiente sería domingo.
10. El 1 de enero de 2358 es miércoles: $6 + 1 + 3 = 10$; $10 - 7 = 3$

Bibliografía

CÁLCULO RÁPIDO

- Cutler, Ann y Rudolph McShane. El sistema de velocidad de Trachtenberg de Matemática Básica. Nueva York: Doubleday, 1960.
- Devi, Shakuntala. Calculando: Las alegrías de los números. Nueva York: Libros básicos, 1964.
- Doerer, Ronald W. Dead Reckoning: Calcular sin instrumentos. Houston: Compañía Editorial del Golfo, 1993.
- Flansburg, Scott y Victoria Hay. Magia matemática. Nueva York: Guillermo Morrow y compañía, 1993.
- Handley, Bill. Matemáticas rápidas: secretos del cálculo mental relámpago. Queensland, Australia: Wrightbooks, 2003.
- Julius, Edward H. Trucos y consejos de matemáticas rápidas: 30 días para numerar Fuerza. Nueva York: John Wiley & Sons, 1992.
- Lucas, Jerry. Convertirse en un mago de las matemáticas mentales. Crozet, Virginia: zapato Prensa de árboles, 1991.
- Menninger, K. La astucia de la calculadora. Nueva York: Libros básicos, 1964.
- Smith, Steven B. Las grandes calculadoras mentales: la psicología, Métodos y vidas de prodigios del cálculo, pasado y presente. Nueva York: Columbia University Press, 1983.
- Pegatina, Henry. Cómo calcular rápidamente. Nueva York: Dover, 1955.
- Stoddard, Eduardo. Matemáticas rápidas simplificadas. Nueva York: Dover, 1994.
- Tirtha, Jagadguru Swami Bharati Krishna, Shankaracharya de Govardhana Pitha. Matemáticas védicas o "Dieciséis fórmulas matemáticas simples de los Vedas". Banaras, India: Hindu University Press, 1965.

MEMORIA

Lorayne, Harry y Jerry Lucas. El libro de la memoria. Nueva York: Libros Ballantine, 1974.

Sanstrom, Robert. El libro de recuerdos definitivo. Los Ángeles: Stepping Stone Books, 1990.

MATEMÁTICAS RECREATIVAS

Gardner, Martín. Magia y Misterio. Nueva York: Casa aleatoria, 1956.

——— Carnaval Matemático. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1965.

——— Espectáculo de Magia Matemática. Nueva York: Random House, 1977.

——— El ahorcamiento inesperado y otras desviaciones matemáticas. Nueva York: Simon & Schuster, 1969.

Hu, Darrell. Cómo mentir con estadísticas. Nueva York: Norton, 1954.

Paulos, John Allen. Analfabetismo: analfabetismo matemático y sus consecuencias. Nueva York: Hill y Wang, 1988.

Stewart, Ian. Juego, escenario y matemáticas: enigmas y acertijos. Nueva York: Penguin Books, 1989.

MATEMÁTICAS AVANZADAS (POR ARTHUR BENJAMIN)

Benjamín, Arthur T. y Jennifer J. Quinn. Pruebas que realmente Conde: el arte de la prueba combinatoria. Washington: Asociación Matemática de América, 2003.

Benjamín, Arthur T. y Kan Yasuda. "¡'Cuadrados' mágicos de hecho!" El American Mathematical Monthly 106, no. 2 (febrero de 1999): 152-56.

Sobre los autores

DR. ARTHUR BENJAMIN es profesor de matemáticas en Harvey Mudd College en Claremont, California, y recibió su doctorado en ciencias matemáticas de la Universidad Johns Hopkins en 1989. En 2000, la Asociación Matemática de América le otorgó el Premio Haimo a la Enseñanza Universitaria Distinguida. También es mago profesional y actúa con frecuencia en el Magic Castle de Hollywood. Ha demostrado y explicado su talento calculador a audiencias de todo el mundo. En 2005, Reader's Digest lo llamó "el mejor genio de las matemáticas de Estados Unidos".

DR. MICHAEL SHERMER es editor colaborador y columnista mensual de Scientific American, editor de la revista Skeptic (www.skeptic.com), director ejecutivo de Skeptics Society y presentador de la serie de conferencias científicas públicas de Caltech. Es autor de numerosos libros de ciencia, entre ellos Por qué la gente cree en cosas raras, Cómo creemos, La ciencia del bien y del mal, Las fronteras de la ciencia y La fricción científica.